Exercice 1
Une variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre p. Donner l'espérance de $Y = X(X-1)\dots(X-r+1)$ où $r \in \mathbb{N}$ est fixé supérieur à 2.

Exercice 2
Coralie se lève tous les matins pour aller au lycée avec une probabilité $\frac{1}{3}$ d'être en retard. Lorsque c'est le cas, elle prend le bus.

Quand elle se lève à l'heure, elle se rend à l'école à pied avec une probabilité de $\frac{2}{5}$ et en bus dans les autres cas.

On note B l'événement "Coralie prend le bus" et R l'événement "Coralie est en retard".

1. Calculer $\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}_B(R)$.
2. On observe ces faits pendant 180 jours et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où Coralie prend le bus.
   Reconnaître la loi de X, calculer son espérance, sa variance. Combien de fois, en moyenne, est-elle allée au lycée à pied ?

Exercice 3
Dans une urne contenant N boules numéroté de 1 à N, on tire, successivement et avec remise, p boules. On note X la variable aléatoire correspondant au maximum des p numéros tirés.

Décrire $(\Omega, \mathbb{P})$ modélisant l'expérience. Calculer $\mathbb{P}(X \leqslant k)$ pour $1 \leqslant k \leqslant N$ et en déduire la loi de X.

Exercice 4
Une urne contient $4n$ jetons numérotés de 1 à $4n$. Les jetons de 1 à n sont rouges, ceux de $n+1$ à $2n$ sont verts, et les autres sont blancs. On tire successivement et sans remise n jetons. On note A l'événement "au moins un des jetons tirés est vert", et, pour $k \in [\![1, n]\!]$, T_k l'événement "on tire pour la première fois un jeton vert au k-ième tirage".

1. Décrire un univers Ω adapté à l'expérience aléatoire, et donner son cardinal.
2. Calculer la probabilité de l'événement A.
3. (a) Calculer $P(T_1)$.
   (b) Calculer $P(T_n)$.
   (c) Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $P(T_k) = \frac{(4n-k)!(3n)!n}{(4n)!(3n-k+1)!}$.

Exercice 5
Soit $c \in \mathbb{N}^*$.

Une urne contient à l'instant initial 1 boule blanche et 1 boule noire. On effectue une suite de tirage avec remise : si la boule tirée est blanche, on rajoute c boules blanches dans l'urne et de même pour les boules noires.

On note X_i la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si on tire une boule blanche au $i$ème tirage, et 0 sinon.

1. Donner la loi et l'espérance de X_1.
2. Que représente $Z_p = \sum_{i=1}^{p} X_i$? Déterminer $\mathbb{P}(X_{p+1} = 1 | Z_p = k)$ pour des valeurs de k à préciser.
3. Montrer que $\mathbb{P}(X_{p+1} = 1) = \frac{1+cE(Z_p)}{2+pc}$.
4. Donner la loi de X_i pour $i \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 6
La cible d'un jeu de fléchette est constituée d'une zone jaune et d'une zone verte ; la probabilité d'atteindre la zone verte, quand la cible est atteinte, est de $\frac{1}{2}$ pour tous les joueurs.

Le joueur A atteint toujours la cible et on note X la variable aléatoire représentant le nombre de lancers nécessaires pour atteindre la zone verte.

Le jour B atteint la cible avec une probabilité $p \in [0, 1]$.

1. Donner la loi de X, son espérance et sa variance.
2. Donner la probabilité que B atteigne la zone verte.
3. Le gagnant est celui qui atteint la zone verte en premier. A commence : donner la probabilité qu'il gagne. Le jeu finit-il presque sûrement ?

Exercice 7
Un mobile se déplace aléatoirement sur les sommet S_1, S_2, S_3 d'un triangle. A l'étape $n = 0$ il est en S_1.

S'il est en S_1 ou en S_3 à l'étape n, il sera en S_2 l'étape $n+1$. S'il est en S_2, il a une probabilité $\frac{1}{4}$ d'aller en S_1, idem pour S_3 et une probabilité $\frac{1}{2}$ de rester en S_2.

On note respectivement a_n, b_n, c_n les probabilités pour que le mobile soit en S_1, S_2, S_3 à l'étape n, et $T_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

Montrer qu'il existe une matrice M, dont on donnera les éléments propres, telle que $T_{n+1} = MT_n$. Calculer M^n puis T_n ainsi que les limites de $(a_n), (b_n)$ et (c_n).

Exercice 8
On considère une urne contenant $n-1$ boules noires et une boule blanche.

1. On effectue une succession de tirages avec remise et on note T la variable aléatoire donnant le rang de premier tirage amenant une boule blanche. Donner les valeurs prises par T, sa loi, son espérance et sa variance.
2. On effectue maintenant des tirages sans remise. Soit X la variable aléatoire donnant le rang du tirage de la boule blanche. Donner les valeurs prises par X, sa loi, son espérance et sa variance.

On note Y la variable donnant le nombre de boule noire restantes dans l'urne après le tirage de la boule blanche. Exprimer Y en fonction de X et n. Donner l'espérance et la variance de Y.

Exercice 9

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ dont la loi est donnée par :

$$\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2 \ \mathbb{P}((X,Y) = (j,k)) = \frac{(j+k)\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{ej!k!}$$

1. Déterminer les lois marginales de X et Y. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Prouver que $E(2^{X+Y})$ existe et la calculer.

Exercice 10

1. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendante, de même loi et admettant un moment d'ordre 2. On pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$.

   Prouver que $\forall a > 0 \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| > a\right) \leqslant \frac{V(Y_1)}{na^2}$.
3. Application. On effectue n tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires.

   A partir de quel nombre de tirage peut on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre $0,35$ et $0,45$?

   Indication : considérer la suite (Y_n) de variables aléatoires de Bernoulli où Y_n mesure l'issue du $n$ième tirage.

Exercice 11

Les deux questions sont indépendantes.

1. (a) Soit X_1, X_2 deux variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.

      Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.

   (b) En déduire l'espérance et la variance de $X_1 + X_2$.
2. Soit X et Y deux variables aléatoires. On suppose que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ.

   On suppose $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $(Y = m)$ est une loi binomiale de paramètre m, p.

   Déterminer la loi de X.

Exercice 12

On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés de telle manière que la probabilité d'obtenir 6 est $\frac{1}{2}$.

1. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient 6. Quelle est la probabilité pour que le dé soit pipé ?
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

   On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6. Quel est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?
3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$. Interpréter.