# Devoir surveillé 1

Durée : 2H. Calculatrices interdites. **Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.**

Lisez l'énoncé attentivement et en entier **AVANT** de commencer le devoir.

**Exercice 1 (Questions de cours)**

1. Formule de dérivations (sans se préoccuper de dérivabilité) :

   (a) $u \times v$

   (b) $f \circ g$

   (c) Pour $\alpha$ une constante, $u^\alpha$

   (d) $f^{-1}$ (la bijection réciproque de $f$)

2. Définition de : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction paire.
3. On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dont on donne les variations :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $-1$ |

   (a) Calculer l'image de $f$.

   (b) Donner le nombre d'antécédents par $f$ des nombres : $7, -2, 0$.

   (c) Préciser le comportement de la courbe représentative de $f$ en $+\infty$

**Exercice 2**

Fixons $\alpha > 0$ un réel différent de 1. On considère la fonction $f_\alpha : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{x \ln(\alpha)} \end{array} \right.$.

1. Rappeler la définition de fonction paire et fonction impaire.
2. Montrer que $f_\alpha$ n'est ni paire ni impaire.
3. Justifier la dérivabilité de $f_\alpha$ et calculer sa dérivée.
4. Donner un tableau de variations de $f_\alpha$. On pourra distinguer plusieurs cas.
5. Calculer les limites de $f_\alpha$ en $+\infty$ et $-\infty$.
6. Calculer l'image de $f_\alpha$, notée $I$.
7. Justifier que $f_\alpha : \mathbb{R} \to I$ est une bijection et exhiber sa réciproque.
8. Préciser l'équation de la tangente à la courbe de $f_\alpha$ en $x = 1$.
9. Tracer les courbes de $f_\alpha$ et $f_\alpha^{-1}$ dans le cas $\alpha = \frac{1}{2}$ et dans le cas $\alpha = e = \exp(1)$. On pourra prendre comme approximation $\ln(2) = \frac{2}{3}$.
10. Calculer la limites de $\frac{f_\alpha(x)}{x}$ quand $x \to +\infty$

**Exercice 3**

On considère les deux fonctions $f : x \mapsto x + \sqrt{x^2 - 1}$ et $g : x \mapsto \ln(f(x)) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$.

## Partie I

Dans cette partie on étudie la fonction $f$.

1. Donner le domaine de définition noté $D_f$ de $f$.
2. Montrer que, sur $D_f$, $f(x)$ est du signe de $x$.
3. Etudier la dérivabilité de $f$ en précisant le domaine de dérivabilité noté $D'_f$.
4. Calculer la fonction dérivée de $f$ et en déduire un tableau de variations pour $f$, sans préciser les limites.
5. Etudier la limite de $f$ en $+\infty$ et montrer que $\sqrt{x^2 - 1} - x \underset{x \to +\infty}{\to} 0$. En déduire la limite de $f$ en $-\infty$.
6. Etudier les tangentes à la courbes de $f$ en 1 et -1.
7. Montrer que la distance entre la courbe de $f$ et la droite d'équation $y = 2x$ tend vers 0 quand $x \to +\infty$.
8. Tracer la courbe représentative de $f$ en faisant apparaître les tangentes de la question 6, ainsi que la droite d'équation $y = 2x$.

## Partie II

Cette fois nous étudions $g$.

1. Donner le domaine de définition de $g$.
2. Citer la définition de : “la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est strictement croissante”.
3. Montrer sans dériver que $g$ est strictement croissante sur son ensemble de définition.
4. Justifier la dérivabilité (en précisant le domaine) et calculer la dérivée de $g$.
5. En déduire la tangente à la courbe de $g$ en $x = 1$.
6. Tracer la courbe représentative de $g$.

## Partie III

1. Montrer que pour $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$.
2. Calculer $g(\mathrm{ch}(x))$ pour $x \geqslant 0$.
3. Calculer $\mathrm{ch}(g(x))$ pour $x \geqslant 1$.
4. Que déduire des calculs précédents ?
5. Retrouver la dérivabilité et la dérivée de $g$ en utilisant la question précédente.