Table des matières

I Sur les fonctions

I.1 Relations de comparaisons

I.1.1 Définition
Soit I un intervalle, $a \in \overline{I}$ et $f, g : I \to \mathbb{R}$ (a est dans I ou est une borne de I, éventuellement infinie)

1. On dit que $f \underset{a}{\sim} g$ ssi $\frac{f}{g} \underset{a}{\to} 1$ et $\frac{g}{f} \underset{a}{\to} 1$. (f et g sont équivalentes, au voisinage de a)
   Cette définition n'a du sens que lorsque le calcul de ces limites en a un. En particulier, les fonctions en jeu ne s'annulent pas au voisinage de a.
2. On dit que $f \underset{a}{=} o(g)$ ou $f = o_a(g)$ ssi $\frac{f}{g} \underset{a}{\to} 0$. (f est négligeable devant g, au voisinage de a)

En particulier les fonctions f et g ne peuvent pas être la fonction nulle

I.1.2 Remarque

On ne peut donc pas écrire $f \underset{a}{\sim} 0$ avec notre définition...

I.1.3 Piège

Ce n'est pas parce que $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$ que $f_1 + f_2 \underset{a}{\sim} g_1 + g_2$. Trouver un exemple où on a pas $f_1 + f_2 \underset{a}{\sim} g_1 + g_2$.

De même, on a pas forcément $\exp(f_1) \underset{a}{\sim} \exp(g_1)$

I.1.4 Exemple

1. On a $f(x) \underset{x\to a}{\to} 0 \iff f(x) = o_a(1)$ et plus généralement, $f(x) \underset{x\to a}{\to} \ell \in \mathbb{R} \iff f(x) = \ell + o_a(1)$.
2. On a $f(x) \underset{x\to a}{\to} \ell \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \iff f(x) \underset{a}{\sim} \ell$. Attention au fait que $\ell \neq 0$ et est une limite finie.

I.2 Les outils de calcul

I.2.1 Théorème (Taylor-Young)
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I et $a \in I$. Alors f possède un développement limité à l'ordre n en a sous la forme

$$\begin{aligned} f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + f^{(3)}(a)\frac{(x-a)^3}{3!} + \\ \cdots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + o_a((x-a)^n) \\ = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} + o_a\left((x-a)^n\right) \end{aligned}$$

I.2.2 Ecriture en 0

Dans le cas des formules usuelles, a est pris égal à 0 et on obtient

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o_0(x^n)$$

Une chose à bien retenir : les facteurs des puissances de x sont des nombres qui sont en fait les coefficients d'un certain polynôme.

I.2.3 Les développements usuels

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a au voisinage de 0 les développements limités usuels suivant (à connaître !)

1. Exponentielle, logarithme, puissances

$$e^x =$$

$$\ln(1+x) =$$

$$\frac{1}{1-x} =$$

$(1+x)^\alpha =$

2. Trigonométrie circulaire

$\sin x =$

$\cos x =$

3. Trigonométrie hyperbolique.

$\operatorname{sh} x =$

$\operatorname{ch} x =$

I.2.4 Proposition
Avec les notations de la définition précédente, on a $f \underset{a}{\sim} g \iff f = g + o_a(g) \iff g = f + o_a(f)$.

Il s'agit de l'outil le plus pratique pour passer d'un équivalent à un "développement", et réciproquement. On retrouve ici que l'équivalent en a d'une fonction est le premier terme non nul dans un développement limité en a.

I.2.5 Exemple

1. Une application directe : $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$.
2. Avec des croissances comparées : $x^2 + x + 1 = x^2 + o_{+\infty}(x^2) \underset{+\infty}{\sim} x^2$.

I.2.6 Proposition
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur l'intervalle I et $a \in I$.

Si f' admet un développement limité à l'ordre n en a alors f admet un développement limité à l'ordre $n+1$ en a qui s'obtient en calculant terme à terme une primitive du développement de f' et en choisissant comme constante la valeur $f(a)$.

I.2.7 A savoir retrouver

En utilisant la méthode d'intégration terme à terme (sans oublier de rajouter la bonne constante d'intégration, à savoir le terme $f(0)$ dans Taylor-Young)

1. Le développement à tout ordre de arctan
2. Les développements à un ordre donné de $\arcsin, \arccos$

I.2.8 Règles de calcul

Rappel :

— On peut multiplier, diviser ou mettre à une puissance **fixée** une relation d'équivalence, mais pas sommer ni soustraire terme à terme. On ne peut **pas** composer de chaque côté une relation d'équivalence par une fonction (en particulier, par $\exp$ ou $\ln$).

— Les développements sont des égalités qui se manipulent donc comme telles, avec les règles de calculs connues sur les o_a :

  — $o_a(f) \pm o_a(f) = o_a(f)$: quand plusieurs o_a identiques apparaissent, on en conserve un seul

  — Si λ est une constante non nulle, $o_a(\lambda f) = o_a(f)$.

  — Dans le cas d'une forme $o_a(f) + o_a(g)$ on conserve un seul "petit o" : on retire celui qui est négligeable devant l'autre.

  — $o_a(f) \pm o_a(f) = o_a(f)$: rien ne sert de faire apparaître un signe moins devant un o_a, ni d'avoir deux fois le même o_a dans une somme.

  — $f \times o_a(g) = o_a(fg)$.

  — A l'intérieur d'un "petit o" ou d'un "grand o", on peut remplacer une expression par son équivalent.

  — On peut effectuer des changements de variables dans les développement usuels en 0, à condition que la nouvelle expression tende bien vers 0.

Conclusion : à par pour une multiplication ou division (ou mise à une puissance fixe) terme à terme, on passera systématiquement par un développement en utilisant la règle $f \underset{a}{\sim} g \iff f = g + o_a(g) \iff g = f + o_a(f)$.

I.2.9 Exemple

1. Trouvons un équivalent de $\sqrt{x^2+1}$ en $+\infty$. On a $x^2+1 \underset{+\infty}{\sim} x^2$ car $1 = o_{+\infty}(x^2)$.
   Ainsi $\sqrt{x^2+1} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{x^2} = x$ (car on est au voisinage de $+\infty$ et donc $x \geqslant 0$).
2. Donnons un développement de $\ln(x+1)$ en $+\infty$. Ici on ne peut pas utiliser l'équivalent usuel qui n'est valable que lorsque $x \to 0$.
   Pour $x > 0$, on a $\ln(x+1) = \ln(x(1+\frac{1}{x}))$ (méthode importante : on a factorisé à l'intérieur par l'équivalent), donc
   $$\ln(1+x) = \ln(x) + \ln(1+\frac{1}{x}) = \ln(x) + \frac{1}{x} + o_{+\infty}(\frac{1}{x})$$
   où la dernière étape est un changement de variable $u = \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$ dans l'équivalent usuel $\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$ ou encore dans le développement $\ln(1+u) = u + o_0(u)$.
   On ne peut pas sommer les équivalents, donc ici on est obligé de passer la forme développement.

I.2.10 Proposition
Soient $f, g, h : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$ ($a \in I$ ou a est une borne de I, éventuellement ouverte).
Si on a $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ pour x au voisinage de a, et $f(x) \underset{a}{\sim} h(x)$ alors $g(x) \underset{a}{\sim} f(x) \underset{a}{\sim} h(x)$.

Preuve.
On a $h(x) = f(x) + o_a(f(x))$ et donc, au voisinage de a, $f(x) \leqslant g(x) \leqslant f(x) + o_a(f(x))$. Ainsi $0 \leqslant g(x) - f(x) \leqslant o_a(f(x))$.

Comme f ne s'annule pas au voisinage de a (on a supposé qu'on connaît un équivalent de f, voir la définition), $|f(x)| > 0$ pour x au voisinage de a et en divisant par $|f(x)| > 0$ on obtient
$$0 \leqslant \left|\frac{g(x)-f(x)}{f(x)}\right| \leqslant o_a(\frac{f(x)}{|f(x)|})$$
car ici $g(x) - f(x) = |g(x) - f(x)|$. De plus, $\frac{f(x)}{|f(x)|}$ est une quantité qui vaut toujours 1 ou -1 et donc le o_a tend vers 0 lorsque $x \to a$.

D'après le théorème d'encadrement, $\left|\frac{g(x)-f(x)}{f(x)}\right| \underset{x\to a}{\to} 0$ et donc $\frac{g(x)-f(x)}{f(x)} \underset{x\to a}{\to} 0$. Ce ci peut s'écrire $g(x) - f(x) = o_a(f(x))$ ou encore $g(x) = f(x) + o_a(f(x))$. CQFD.

La preuve est technique dans le cas général car on ne connaît pas le signe de f alors qu'on veut diviser une inégalité. En pratique, le signe de f est souvent évident au voisinage de a et la preuve devient beaucoup plus simple. ■

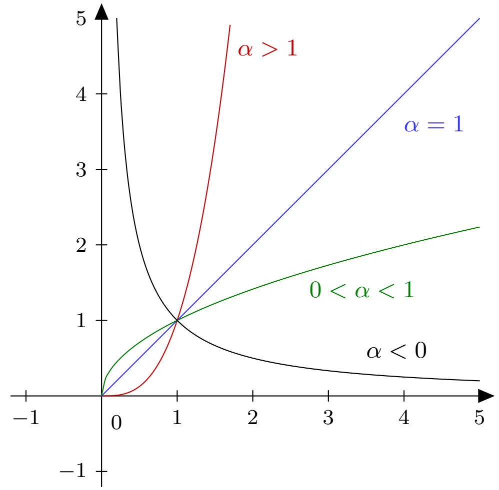
I.3 Croissances comparées

I.3.1 Sur les puissances

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $\alpha < \beta$. Les comportements en 0 et $+\infty$ sont opposés :
$$x^\alpha = o_{+\infty}(x^\beta) \text{ et } x^\beta = o_0(x^\alpha)$$

I.3.2 Rappel

On peut se souvenir du résultat précédent grâce à un autre résultat important du cours : les positions relatives des fonctions puissances.



I.3.3 Théorème (Retour en terminale)
$$\lim_{x\to0} x\ln(x) = 0, \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0, \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

Ces résultats nous permettrons de démontrer la version du théorème vue en 1ère année

Preuve.

— Montrons d'abord que $\frac{\ln(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$. Soit $x \geqslant 1$, alors on a $\ln(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t$.
Comme, pour $t \in [1, x]$, on a $t \geqslant \sqrt{t} > 0$, on a alors $\frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{\sqrt{t}}$ et par croissance de l'intégrale

$$\ln(x) \leqslant [2\sqrt{t}]_1^x = 2\sqrt{x} - x$$

En divisant par $x > 0$, on obtient $0 \leqslant \frac{\ln(x)}{x} \leqslant \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x}$. D'après le théorème d'encadrement, on en déduit $\frac{\ln(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$.

— On sait que $x = e^t \underset{t\to+\infty}{\to} +\infty$. Par changement de variable dans la limite précédente, on obtient donc $\frac{\ln(e^t)}{e^t} \underset{t\to+\infty}{\to} 0^+$ et par passage à l'inverse $\frac{e^t}{t} \underset{t\to+\infty}{\to} +\infty$.

— Montrons finalement que $x\ln(x) \underset{x\to 0^+}{\to} 0^-$.
Cette fois on effectue le changement de variable $t = \frac{1}{x} \underset{x\to 0^+}{\to} +\infty$ et on avait $\frac{\ln(t)}{t} \underset{t\to+\infty}{\to} 0$. On en déduit $x\ln(\frac{1}{x}) \underset{x\to 0^+}{\to} 0$ ou encore $-x\ln(x) \underset{x\to 0^+}{\to} 0$. Il suffit de passer à l'opposé. ∎

I.3.4 Théorème (Comparaison en $+\infty$)
Soient $\alpha, \beta \in]0, +\infty[$. Ces nombres sont **strictement positifs.**

1. $(\ln(x))^\alpha = o_{+\infty}(x^\beta)$.
2. $x^\beta = o_{+\infty}(e^x)$

Preuve.
La même technique de changement de variable permet de prouver seulement la première comparaison.

Or, pour $x > 1$, $\frac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} = \left(\frac{\ln(x)}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}}\right)^\alpha$. Remarquons, en posant $t = x^{\frac{\beta}{\alpha}}$ que $x = t^{\frac{\alpha}{\beta}}$ et donc $\ln(x) = \frac{\alpha}{\beta}\ln(t)$.

De plus, $\frac{\beta}{\alpha} > 0$ et donc $t \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$. On a déjà vu, que $\frac{\ln(t)}{t} \underset{t\to+\infty}{\to} 0$. Il reste à voir, en posant $u = \frac{\alpha}{\beta}\frac{\ln(t)}{t}$ que $u \underset{t\to+\infty}{\to} 0$ et $u^\alpha \underset{u\to 0}{\to} 0$ car $\alpha > 0$ pour conclure :

$$\frac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$$

∎

I.3.5 Théorème (Comparaison en 0)
Soient $\alpha, \beta \in]0, +\infty[$. $|\ln(x)|^\alpha = o_0\left(\frac{1}{x^\beta}\right)$ ou encore $x^\beta|\ln(x)|^\alpha \underset{0^+}{\to} 0$.

Preuve.
Il s'agit simplement de poser $t = \frac{1}{x}$ dans le théorème précédent car on a $x \to 0^+ \iff t \to +\infty$. ∎

II Sur les suites

Ici la situation est plus simple, car les seules limite que l'on peut étudier sont quand l'indice (souvent noté n) tend vers $+\infty$

Rappel

Pour une suite $(u_n) \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$ on a

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0 \iff |u_n| \underset{n\to+\infty 0}{\to}$$

II.1 Rappels sur les suites géométriques

II.1.1 Forme des suites géométriques

Ce sont les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = qu_n$ où $q \in \mathbb{C}$ est fixé (comprendre, ne dépend pas de l'indice n).

On a alors, par une récurrence facile, $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n = u_0 q^n$.

II.1.2 Lemme
Soit $q \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$. Si $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors sa limite est 0.

Preuve.
Notons $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n = q^n$ et supposons que $u_n \underset{+\infty}{\to} l \in \mathbb{C}$.

Alors $u_{n+1} \underset{+\infty}{\to} l$. Mais pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = q^{n+1} = qu_n$ et donc par produit de limites finies $u_{n+1} \underset{+\infty}{\to} ql$. Par unicité de la limite, $l = ql$ et donc $l(q-1) = 0$. Comme $q - 1 \neq 0$ on a alors $l = 0$ ∎

II.1.3 Théorème (Limites des suites géométriques)
Soit $q \in \mathbb{C}$.

1. $q^n \underset{+\infty}{\to} 0$ ssi $|q| < 1$.
2. $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ssi $|q| < 1$ ou $q = 1$.
3. Dans le cas où $q \in \mathbb{R}$ on peut ajouter que $q^n \underset{+\infty}{\to} +\infty$ ssi $q > 1$.

II.2 Comparaison des suites

II.2.1 Proposition
Soient $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite **bornée** et $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite.

1. Si $v_n \underset{+\infty}{\to} 0$ alors $u_n v_n \underset{+\infty}{\to} 0$.
2. Si $v_n \underset{+\infty}{\to} +\infty$ alors $\frac{u_n}{v_n} \underset{+\infty}{\to} 0$ ou encore $u_n = o_{+\infty}(v_n)$.

II.2.2 Définition
Soient $(u_n), (v_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ deux suites avec (v_n) qui ne s'annule pas à partir d'un certain rang. On dit que (u_n) est **dominée** par (v_n) ssi la suite $\left(\left|\frac{u_n}{v_n}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

On note alors $u_n = O_{+\infty}(v_n)$ (grand o).

II.2.3 Règles de calcul

Elles sont les mêmes que pour les petits o. En particulier on pourra écrire

1. $O_{+\infty}(u_n) = u_n O_{+\infty}(1)$
2. $O_{+\infty}(u_n) \pm O_{+\infty}(u_n) = O_{+\infty}(u_n)$

avec, comme d'habitude, la précaution élémentaire de se souvenir que chaque O représente une suite, et que ces suites ne sont pas égales même si elles s'écrivent sous la même forme.

II.2.4 Proposition (Comparaison à une suite géométrique)
Soit (u_n) une suite à valeurs **strictement positive**. On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{+\infty}{\to} \ell \in \mathbb{R}^+$ (ou $\ell = +\infty$).

1. Si $\ell < 1$, alors pour tout $q \in]\ell, 1[$, $u_n = o_{+\infty}(q^n)$.
2. Si $\ell > 1$, alors pour tout $q >]1, \ell[$, $q^n = o_{+\infty}(u_n)$.

Dans le cas $\ell = 1$, on ne peut pas directement comparer (u_n) à une suite géométrique à l'aide d'une relation de négligeabilité.

Preuve.
Correction On traite le cas $0 \leqslant \ell < 1$. Le cas $\ell > 1$ est une conséquence directe en passant à l'inverse.

Soit $q \in]\ell, 1[$. On pose $a = \frac{q+\ell}{2}$ (le milieu de q et ℓ, sur la droite réelle). Alors on a $\ell < a < q < 1$.

A partir d'un certain rang n_0, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \in]0, a]$. Ainsi pour $n > n_0$, on peut écrire

$$u_n = \frac{u_n}{u_{n-1}} \times \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \times \cdots \times \frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}} \times u_{n_0}$$

Par multiplications d'inégalités entre nombres positifs, on a donc $u_n \leqslant a^{n-n_0} u_{n_0} = a^n K$ où $K = \frac{u_{n_0}}{a^{n_0}}$ est une constante (on a fixé q).

Toujours par multiplication d'inégalités entre nombres positifs, $0 \leqslant \frac{u_n}{q^n} \leqslant K\left(\frac{a}{q}\right)^n$. or $\frac{a}{q} \in [0, 1[$ et donc par le théorème d'encadrement, $u_n = o_{+\infty}(q^n)$.

II.2.5 Corollaire
Avec les mêmes notations, et toujours pour (u_n) **strictement positive**

1. Si $l < 1$, alors $u_n \underset{+\infty}{\to} 0$.
2. Si $l > 1$ alors $u_n \underset{+\infty}{\to} +\infty$.

Le résultat de la proposition est plus précis, car il indique que (u_n) tend "plus vite" que certaines suites géométriques.

II.2.6 Théorème
Soient $\alpha, \beta \in]0, +\infty[$. Soit $q > 1$.

1. $\ln(n)^\alpha = o_{+\infty}(n^\beta)$.
2. $n^\beta = o_{+\infty}(q^n)$
3. $q^n = o_{+\infty}(n!)$.
4. $n! = o_{+\infty}(n^n)$.

Preuve.

1. Il s'agit d'un simple changement de variable dans le théorème sur les fonctions.
2. Idem, en rappelant que comme $q > 0$, on a $q^n = e^{n\ln(q)}$ et comme $q > 1$ on a bien $\ln(q) > 0$.
3. Cette fois on ne peut pas se fier aux fonctions, car nous ne connaissons pas (encore...) de fonction dont la restriction à $\mathbb{N}$ serait la factorielle.
   Utilisons le résultat de II.2.4. Pour $n \geqslant 0$, on pose $u_n = \frac{q^n}{n!} > 0$. Alors
   $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{q^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{q^n} = \frac{q}{n+1} \underset{+\infty}{\to} 0$$
   On peut ainsi en conclure que $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ qui est bien la définition de $q^n = o_{+\infty}(n!)$.
   On a même prouvé un résultat plus fort et complètement naturel (si on y prend garde) : (u_n) tend vers 0 "plus vite" que n'importe quelle suite géométrique, ou encore : on peut multiplier (u_n) par n'importe quelle suite géométrique, par exemple (1000^n) et on a encore $1000^n u_n \underset{+\infty}{\to} 0$
4. Utilisons la même technique. Posons, pour $n > 0$, $u_n = \frac{n!}{n^n}$. On a bien $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ $u_n > 0$.
   De plus,
   $$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)!}{(n+1)^(n+1)} \times \frac{n^n}{n!} = \frac{n+1}{(n+1)^n \times (n+1)} \times n^n \\ &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \\ &= e^{-n\ln(1+\frac{1}{n})}\end{aligned}$$
   Or $\ln(1+u) \underset{u\to0}{\sim} u$ et on a $\frac{1}{n} \underset{+\infty}{\to} 0$. Donc $\ln(1+\frac{1}{n}) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ et par produit d'équivalents,
   $$-n\ln(1+\frac{1}{n}) \underset{+\infty}{\sim} -1$$
   On ne peut pas composer cet équivalent par l'exponentielle pour obtenir un équivalent de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$
   Ainsi $-n\ln(1+\frac{1}{n}) \underset{+\infty}{\to} -1$ et par composition **de limites** $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{+\infty}{\to} e^{-1} < 1$.
   Ainsi, d'après II.2.4, $u_n \underset{+\infty}{\to} 0$ et on a bien $n! = o_{+\infty} n^n$. ∎

Index