

Calculs liés : fiches 21 et 22.

## Règles de calcul

### Exercice 1

1. Donner un équivalent en 0 de  $\sin^3$  puis un développement limité à l'ordre 4.
2. Donner un équivalent puis un développement limité à l'ordre 2 en 0 de  $e^x \times \ln(1+x)$ .
3. Donner un développement limité à l'ordre 5 en 0 de  $\sqrt{1+x^2}$ .
4. Donner un développement limité à l'ordre 6 en 0 de  $f : x \mapsto \int_0^x \sqrt{1+t^2} dt$ .

## Limites indéterminées

### Exercice 2

1. Que dire de la limite de  $\frac{1}{x}$  quand  $x \rightarrow 0$  ?
2. Donner toutes les formes de limites indéterminées.

### Exercice 3

Dire si les limites suivantes sont indéterminées, les calculer et préciser le cas échéant la croissance comparée utilisée.

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln(x)$
2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4x + 3}{e^{-x} + \sin(\frac{1}{x})}$
3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)+2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$
4.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \frac{1}{x})^x$

### Exercice 4

Déterminer un équivalent des procédés suivants :

1.  $n > 0$  fixé,  $\cos(nx) \frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)}$  en 0.
2.  $\frac{x^2 + \ln x}{x^{\frac{2}{3}} + (\frac{2}{3})^x}$  en  $+\infty$ .
3.  $\frac{\sqrt[4]{x+x^{\frac{6}{5}}}}{x^{-1}+1}$  en 0.
4.  $\frac{xe^x}{x^2+x}$  en 0 et en  $+\infty$ .

### Exercice 5 (Un peu plus difficile)

Déterminer un équivalent des procédés suivants :

1.  $\ln(\cos(x))$  en 0
2.  $\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2+1}$  en 0 et en  $+\infty$
3.  $\ln(x^2+x+1) - 2\ln(x)$  en  $+\infty$ .
4.  $\frac{e^x - \cos(x)}{\sin(x+x^2)}$  en 0.

### Exercice 6

Pour  $n \in \mathbb{N}$  on pose  $u_n = \sum_{k=0}^n k!$ .

1. Montrer que  $\forall n \geq 2 \ n! \leq u_n \leq n!(1 + \frac{2}{n})$  par récurrence.
2. En déduire un équivalent de  $u_n$ .

## Révisions sur les suites

### Exercice 7

Trouver une suite  $(u_n)$  divergente (par exemple qui tend vers  $+\infty$ ) et telle que  $(u_{n+1} - u_n)$  converge vers 0.

### Exercice 8

On définit la suite  $(u_n)$  par  $u_0 \in ]0, 1[$  et  $u_{n+1} = u_n - u_n^2$ .

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \in ]0, 1[$ .
2. Etudier la monotonie de  $(u_n)$ .
3. Montrer que  $(u_n)$  converge et ensuite calculer sa limite.

### Exercice 9 (\*)

Etudier la suite<sup>1</sup> :  $u_0 \in [1, 2]$  et  $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

## Comparaison des suites

### Exercice 10

Que signifie  $u_n = O_{+\infty}(1)$  pour la suite  $(u_n)$  ?

### Exercice 11

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  des suites à valeurs réelles ou complexes (et qui se s'annulent pas).

1. Montrer que  $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \Rightarrow u_n = O_{+\infty}(v_n)$ .
2. Montrer que  $u_n = o_{+\infty}(v_n) \Rightarrow u_n = O_{+\infty}(v_n)$ .

### Exercice 12

Calculer les limites suivantes et traduire en terme de  $o_{+\infty}$  (2 traductions à chaque fois).

1.  $n^2 e^{-n} \xrightarrow{+\infty}$
2.  $\frac{n^2}{n!} \xrightarrow{+\infty}$
3.  $n^2 e^{-(\ln(n))^2} \xrightarrow{+\infty}$
4.  $\frac{\sqrt{n^3+2n+1}}{n \ln(n)} \xrightarrow{+\infty}$

### Exercice 13

Pour les suites  $(u_n)$  suivantes, vérifier qu'elles sont **strictement positives**, calculer la limites de  $(\frac{u_{n+1}}{u_n})$  ainsi que celle de  $(u_n)$ .

1. Rappel : on a  $u_{n+1} = f(u_n)$ , on peut étudier des intervalles stables par  $f$  ainsi que ses points fixes...

1.  $u_n = \frac{1}{n}$

2.  $u_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

3.  $u_n = \binom{2n}{n}$

4.  $u_n = \ln(n^2 + 1)$

**Exercice 14 (★)**

Nous allons étudier plus précisément la suite  $u_n = \binom{2n}{n}$ . Une manière classique est d'étudier

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt.$$

1. Montrer que  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante.

2. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N} \quad I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$ .

**Indication :** une méthode très classique pour obtenir une relation de récurrence sur des intégrales est d'effectuer une intégration par parties.

3. Calculer  $I_0$  et exprimer  $I_{2p}$  en fonction de  $I_0$  pour tout  $p \in \mathbb{N}$ . On attend une expression faisant intervenir  $u_p$ .

4. Calculer  $I_1$  et exprimer  $I_{2p+1}$  en fonction de  $I_1$  pour tout  $p \in \mathbb{N}$ .

5. Montrer, en utilisant les questions 1 et 2, que  $I_{2p+1} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} I_{2p}$ .

6. Donner un équivalent de  $u_p$ .