Devoir maison n°1

A rendre le 13/09

Rappels

— Si $f : I \to \mathbb{K}$ est une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$, alors la fonction

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

est dérivable et sa dérivée est f. En d'autres termes, F est une primitive de f (c'est d'ailleurs la seule primitive de f qui s'annule en a).

— Si f est une fonction continue, on note $\displaystyle\int^x f(t)\mathrm{d}t$ une primitive "générique" de f (on ne note pas de constante d'intégration et on obtient une primitive de f). Les outils d'intégration par parties et de changement de variable s'appliquent à ces calculs de primitives.
Rappelons que $[g(t)\mathrm{d}t]^x = g(x) - 0$ (on ne fait pas apparaître de constante).

Exercice 1 (Révisions autour des intégrales)

1. Quelques calculs de dérivées. **Avant** chaque calcul, prouver la dérivabilité en donnant le domaine de dérivabilité.
   (a) Dériver $\cos^3$.
   (b) Dériver $x \mapsto e^{-x^2}$.
   (c) Dériver $x \mapsto \frac{\ln(1-t^2)}{2t^2-3t+1}$
2. Des intégrales.
   (a) Donner une primitive de ln en précisant l'intervalle sur lequel le calcul est valable.
   (b) Calculer $\displaystyle\int^x \frac{1}{t\ln(t)^3}\mathrm{d}t$ en posant $u = \ln(t)$.
   (c) Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$. Justifier que $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{1}{k}\mathrm{d}t \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\mathrm{d}t$ puis en déduire un encadrement de $\frac{1}{k}$.
   Donner ensuite un encadrement, pour $N \in \mathbb{N}$, $N \geqslant 2$ de $\sum\limits_{k=2}^{N} \frac{1}{k}$.

Indications

1. (a)
   (b)
   (c)
2. (a) On pourra calculer $\int^{x} 1 \times \ln(t)\mathrm{d}t$ par intégration par parties.
   (b) On a $t = \dots$ et donc $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = \dots$ et $\mathrm{d}t = \dots \mathrm{d}u$. Attention au changement de borne
   (c) Si une inégalité est vraie pour toute valeur de t dans un intervalle, on peut intégrer cette inégalité sur l'intervalle en question en conservant l'inégalité (croissance de l'intégrale).
   Ensuite il s'agit d'un calcul facile d'intégrales (attention à la variable d'intégration) puis de reconnaître deux sommes que l'on sait calculer.