I Somme, produit

Opérations sur les matrices

1. Les règles de calculs sur les sommes de matrices sont les mêmes que pour les nombres, en prenant garde à sommer des matrices de même taille.
2. Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K})$ (remarquer le même p pour le nombre de colonnes de A et de ligne de B), alors la matrice produit est $C = AB \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$ et le coefficient d'indices i, j de C est (notations évidentes pour les coefficients)
$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$$
On peut tout à fait retrouver cette formule en posant le produit matriciel.
3. Avec les mêmes notations, et en posant $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ et on peut noter λAB.
4. Même pour des matrices carrées pour lesquelles AB et BA existent (parfois le produit n'est possible que dans un sens, par exemple une matrice carrée multipliée par une colonne) on a en général $AB \neq BA$.
5. Si on peut calculer ce produit matriciel (comprendre : si les tailles sont compatibles), alors $(AB)C = A(BC)$ et on peut le noter ABC.
6. Les règles de développement usuelles s'appliquent, en prenant bien garde au fait que le produit n'est pas commutatif.

Rappels sur les matrices particulières

Un produit ou une somme de matrices triangulaire (ou diagonale) reste triangulaire (de même type).

Si $D = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale, alors $D^k = \begin{pmatrix} a_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n^k \end{pmatrix}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ (avec la convention $0^0 = 1$).

Théorème du binôme, version matrices

Soit $n \in \mathbb{N}, A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. **Si** $AB = BA$ alors

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} A^k B^{n-k}$$

II Transposition

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. La transposée de $A = (a_{i,j})$ est la matrice $A^T = (a'_{i,j}) \in \mathcal{M}_{p,n}$ telle que $\forall i \in [\![1, p]\!] \forall j \in [\![1, n]\!] a'_{i,j} = a_{j,i}$.

Ainsi la première ligne (resp. colonne) de A^T a les coefficients de la premières colonnes (resp. ligne) de A, et ainsi de suite. En particulier, la transposée d'une matrice ligne est une matrice colonne, et réciproquement.

On a immédiatement $\left(A^T\right)^T = A$.

Propriétés calculatoires

1. Pour des matrices de même taille A, B et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$
$$(\alpha A + \beta B)^T = \alpha A^T + \beta B^T$$
L'application $M \mapsto M^T$ est une application linéaire (qui est même un automorphisme, dont l'inverse est lui même).
2. Pour deux matrices A, B qui ont des tailles telles que AB a du sens, on a
$$(AB)^T = B^T A^T$$

III Rang, inversibilité

Matrice inversible

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite inversible ssi il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$AB = I_n = BA.$$

Dans ce cas on note $B = A^{-1}$ et pas $\frac{1}{A}$. En particulier on ne notera pas de quotients de matrices, mais des produits par l'inverse.

On note $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n inversibles. Ce n'est pas un espace vectoriel !

Lien avec les opérations

1. Le produit de deux matrices $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$ inversibles est encore inversible et on a $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
2. Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$ alors A^{-1} est inversible et $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.
3. $A \in GL_n(\mathbb{K})$ ssi $A^T \in GL_n(\mathbb{K})$. Dans le cas d'inversibilité on a $(A^T)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.
4. A priori, on ne peut rien dire sur une somme (ou une combinaison linéaire) de matrices inversibles.

Matrice particulières

Une matrice triangulaire A est inversible ssi ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. A^{-1} est triangulaire de même type et ses coefficients diagonaux sont les inverses de ceux de A.

Ceci est encore valable pour les matrices diagonales qui sont des matrices triangulaires particulières.

Noyau, image et lien avec les systèmes

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1. Le noyau de A est noté $\ker(A)$ et $\ker(A) = \{X \in \mathbb{K}^p |\ AX = 0_{\mathbb{K}^n}\}$. Il s'agit de l'ensemble des solutions du système homogène associé à A.
2. L'image de A est notée $\mathrm{Im}(A)$ et $\mathrm{Im}(A) = \{Y \in \mathbb{K}^n |\ \exists X \in \mathbb{K}^p\ Y = AX\}$. On montre facilement que $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}(C_1, \ldots, C_p)$ où $C_1, \ldots, C_p$ sont les colonnes de A.
   L'interprétation en terme de système est : $\mathrm{Im}(A)$ est l'ensemble de tous les seconds membres tels que le système de matrice A correspondant est compatible (possède au moins une solution).

Rappel : dans le cas d'un système compatible de matrice A (s'il est homogène il l'est forcément), l'ensemble des solutions est de dimension $\dim(\ker(A)) = p - \mathrm{rg}(A)$.

Rang d'une matrice

Avec les mêmes notations, $\mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{Im}(A))$ est la dimension de l'espace engendré par les colonnes de A, c'est à dire le nombre maximal de colonnes libres.

Transposition

Pour toute matrice A on a

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^T)$$

L'interprétation est : l'espace engendré par les lignes de A est de même dimension que l'espace engendré par les colonnes (mais a priori ces espaces ne sont pas égaux, seulement de même dimension).

Théorème du rang, version matrice et systèmes

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors on a

$$p = \dim(\ker(A)) + \mathrm{rg}(A)$$

p est le nombre d'inconnues d'un système homogène de matrice A. Pour résoudre ce système, on devra poser exactement $p - \mathrm{rg}(A)$ paramètres et exprimer les $\mathrm{rg}(A)$ inconnues restantes en fonction (sous forme de combinaison linéaire) des paramètres.

Conditions d'inversibilité

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Notons $C_1, \dots C_n$ les colonnes de A et $L_1, \dots, L_n$ ses lignes.
On a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned}
A \in GL_n(\mathbb{K}) &\iff (C_1, \dots C_n) \text{ est une base de } M_{n,1}(\mathbb{K}) \\
&\iff (L_1, \dots L_n) \text{ est une base de } M_{1,n}(\mathbb{K}) \\
&\iff \mathrm{rg}(A) = n \iff \mathrm{Im}(A) = \mathbb{K}^n \qquad \iff \forall Y \in \mathbb{K}^n \exists! X \in \mathbb{K}^n \ AX = Y \\
&\iff \ker(A) = \{0_{\mathbb{K}^n}\} \\
&\iff \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) AB = I_n
\end{aligned}$$

IV Matrice d'une famille, d'un endomorphisme

Matrice d'une famille

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie égale à n et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soit $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$ une famille de vecteurs. Pour $i, j \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$ on note a_{ij} la ième coordonnée de u_j.

Alors la matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est appelé matrice de la famille $(u_1, \dots, u_p)$ dans la base $\mathcal{B}$ et est noté $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_p)$.

C'est la matrice des colonnes des coordonnées des u_j, et on note les coordonnées en colonne.

Matrice d'une application linéaire

1. Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie de dimension respectives p et n. On note $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{B}_F = (u_1, \dots, u_n)$ une base de F. Soit également $f \in \mathcal{L}(E, F)$. La matrice de f dans $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ (noté $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$) est la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(e_1), \dots, f(e_p)) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

   C'est la matrice des coordonnées des $f(e_j)$ dans $u_1, \dots, u_n$, écrites en colonnes.
2. Si $f \in \mathcal{L}(E)$, on note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_E}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

Produit matriciel et évaluation

Avec les notations de la définition. Soient en plus $x \in E$ et $y \in F$. On note $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x)$ et $y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(y)$, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$.

$$y = f(x) \iff Y = AX$$

Multiplier par A revient à calculer l'image par f (à condition que les bases soient les bonnes).

Composition et produit

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-ev de dimensions respectives q, p, n et de bases $\mathcal{B}_E,\ \mathcal{B}_F,\ \mathcal{B}_G$. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

On pose de plus $M_f = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $M_g = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_G}(g) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Alors $C = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_G}(g \circ f) = M_g M_f \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$

Rappel : si $C = AB$, $c_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$.

Rang

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ une matrice.

1. Si A est la matrice d'une certaine famille $(u_1, \ldots, u_p)$ dans une base $\mathcal{B}$ on a :

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(u_1, \ldots, u_p) = \dim(\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p))$$

   La famille des colonnes de A engendre un espace de même dimension que la famille $(u_1, \ldots, u_p)$. On peut même être plus précis : $\mathrm{Im}(A)$ (l'espace engendré par les colonnes de A) est l'ensemble des coordonnées dans $\mathcal{B}$ des éléments de $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$

2. Si A est la matrice d'une application linéaire f (endomorphisme ou non) on a :

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(f)$$

Interprétation de l'inversibilité

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.

1. Si A est la matrice d'une certaine famille $(u_1, \ldots, u_n)$ on a : A est inversible ssi $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base.
2. Si A est la matrice d'une application linéaire f (endomorphisme ou non) on a : A est inversible ssi f est bijective.

V Changement de base

Matrice de passage

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E. On appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$.

On exprime la **nouvelle base** $\mathcal{B}'$ en fonction de l'**ancienne base**

Changement de base d'un endomorphisme

Soient E un $\mathbb{K}$-ev $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E. On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On pose $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $M' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$. Alors

$$M' = P^{-1} M P$$