Exercice 1

1. On considère le système $\begin{cases} 2x+y-\quad z=3 \\ x\qquad -\quad z=0 \\ \qquad y+44z=9 \end{cases}$. Écrire ce système sous forme matricielle $AX=Y$ en identifiant bien les matrices en jeu.

   Exprimer AX sous forme d'une combinaison linéaire de colonnes où les coefficients sont les inconnues du système.
2. On considère une matrice $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On note $C_1,\dots,C_p$ les colonnes de A. Soit également $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}\in\mathbb{K}^p$ (par abus, on identifie les colonnes et les vecteurs de $\mathbb{K}^p$).

   Exprimer AX avec les notations fournies.
3. Soit $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. On note C_1,C_2,C_3 les colonnes de A. Que dire de $2C_1-C_2$? En déduire une colonne X telle que $AX=0$

Exercice 2

Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $B=A^TA$ est une matrice symétrique (c'est à dire égale à sa transposée).

Exercice 3

Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice. Montrer que $\frac{A+A^T}{2}$ est symétrique et $\frac{A-A^T}{2}$ est anti-symétrique.

Exercice 4

Une matrice réelle carrée est dite *stochastique* ssi la somme des coefficients de chacune de ses colonnes vaut 1.

Soient $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices stochastiques. Montrer que AB est stochastique.

Exercice 5

On considère $L\in\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ une matrice ligne et $C\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (identifié à K^n) une matrice colonne.

1. On pose $A=CL$ et $B=LC$. Quelles sont les tailles de A et B ?
2. Calculer A^2 en fonction de A.
3. Question bonus : on suppose C,L non nulles. Montrer que $\mathrm{rg}(A)=1$.

Exercice 6

Soient $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que AB est inversible.

1. Montrer que A est inversible.
2. Montrer que B est inversible.

Exercice 7

Montrer que $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.

Exercice 8

On reprend comme matrice A la dernière matrice de l'exercice 1. Donner l'ensemble des solutions du système $AX=0$ d'inconnue $X\in\mathbb{R}^3$.

Exercice 9

Soit $A\in\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$; Expliquer pourquoi les 3 lignes de A forment forcément une famille liée. Qu'en déduire pour le système homogène $AX=0$ d'inconnue $X\in\mathbb{R}^2$.

Exercice 10

On considère le système à 3 inconnues : $x-2y+z=0$. Combien faut-il poser de paramètre(s) pour le résoudre ? Quelle est l'interprétation géométrique ?

Exercice 11

Rappel : $\mathcal{B}=(1,X,X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Donner la matrice de $\mathcal{F}=(P_1,P_2,P_3)=(X-1,2X^2+3,X^2+2X+4)$ dans $\mathcal{B}$.

$\mathcal{F}$ est-elle une base de $\mathbb{R}_2[X]$?

Exercice 12

Notons M la matrice de l'exercice précédent. On considère $f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)=M$.

1. Calculer $f(X^2+2X-2)$.
2. Montrer que f est un automorphisme.

Exercice 13

On considère l'application linéaire $f:\begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix} \end{cases}$.

1. Donner la matrice A de f dans la base canonique.
2. Montrer que $\mathcal{B}=(\vec{u},\vec{v})=(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix})$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et calculer $M=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
3. Soit $n\in\mathbb{N}$. Exprimer A^n en fonction de M (entre autre) et calculer A^n.