Devoir maison 2

A rendre le au plus tard le 27/09/2020.

Exercice 1
Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On s'intéresse à la nature de la série $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$ suivant les valeurs de α et β

1. Question préliminaire : si on veut évaluer des sommes partielles, quel sera le premier indice de chaque somme ?
2. On suppose $\alpha > 1$. Trouver un réel $\gamma > 1$ tel que $\frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta} = o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$. Conclure sur la nature de la série dans ce cas.
3. On suppose $\alpha < 1$. Trouver un réel $\gamma \leqslant 1$ tel que $\frac{1}{n^\gamma} = o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}\right)$. Conclure.
4. On suppose maintenant $\alpha = 1$. Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n \geqslant 2} \frac{1}{n(\ln(n))^\beta}$ suivant la valeur de β en utilisant une comparaison série-intégrale.
5. Résumer, dans un tableau, la nature des séries de Bertrand suivant les valeurs de α et β.
6. On suppose maintenant α et β strictement positifs. Que dire de la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$?

Indications :

1.
2. Revenir à la définition de $o_{+\infty}$ pour trouver une condition supplémentaire que doit vérifier γ.
3. Idem
4. Nous avons un exemple complet d'application : la preuve du théorème donnant la nature des séries de Riemann. Pour un calcul de primitive, on pourra se référer au premier DM.
   Remarque : en considérant seulement le cas $\beta > 0$, on a $\frac{1}{n\ln(n)^\beta} = o_{+\infty}(\frac{1}{n})$ et on ne peut pas conclure sur la convergence par comparaison car la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge. De même, pour tout $\alpha > 1$, $\frac{1}{n^\alpha} = o_{+\infty}(\frac{1}{n\ln(n)^\beta})$ et on ne peut pas conclure sur la divergence par comparaison car $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge.
   On est ici face à une série que l'on ne sait pas comparer aux séries de Riemann en utilisant notre théorème.
5. On peut, par exemple, indiquer des valeurs de α en lignes et celles de β en colonnes.
6.