

Table des matières

- I Trace**
- I.1 Trace d'une matrice
- I.2 Trace d'un endomorphisme
- II Déterminant**
- II.1 Déterminant de taille n
- II.2 Propriétés calculatoires
- II.3 Déterminant et espace vectoriel

I Trace

I.1 Trace d'une matrice

Définition 1

Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle la trace de A et on note $\text{tr}(A)$ le nombre $\sum_{i=1}^n a_{i,i}$ qui est la somme de ses coefficients diagonaux.

Proposition 1

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. $\text{tr}(A^T) = \text{tr}(A)$
2. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \text{ tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha \text{tr}(A) + \beta \text{tr}(B)$.

Ainsi la trace est une forme linéaire : $\text{tr} \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$

I.2 Trace d'un endomorphisme

Théorème 1 (Trace d'un produit)

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ (remarquer les tailles).

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$$

Définition 2

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices carrées.

On dit que A et B sont semblables ssi il existe une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A = P^{-1}BP$.

Définition-Proposition 1

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$. Le scalaire $\text{tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$ ne dépend pas de la base \mathcal{B} de E choisie pour calculer la matrice. On le note $\text{tr}(f)$.

II Déterminant

1 II.1 Déterminant de taille n

1 Définition-Proposition 2

1 Il existe une unique application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ telle que

1. $\det(I_n) = 1$
2. \det est linéaire par rapport à chaque colonne.
3. \det est anti-symétrique ie change de signe si on échange deux colonne de sa variable.

1 Proposition 2 (Opérations sur les déterminants)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On fait subir une opération élémentaire sur les colonnes de A et on note A' la matrice obtenue.

1. Si l'opération est $C_i \leftrightarrow C_j$ avec $i \neq j$ alors $\det(A') = -\det(A)$.
2. Si l'opération est $C_i \leftarrow \lambda C_i$ avec $\lambda \neq 0$ alors $\det(A') = \lambda \det(A)$
3. Si l'opération est $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ et $i \neq j$ alors $\det(A') = \det(A)$.

Corollaire 1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$

Théorème 2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est inversible ssi $\det(A) \neq 0$.

Proposition 3

Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux.

II.2 Propriétés calculatoires

Théorème 3

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $\det(AB) = \det(A) \det(B)$. Plus généralement, le déterminant d'un produit de matrices est égal au produit des déterminants.

Corollaire 2

Si A est inversible alors $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Dans ce cas, on a également

$$\forall k \in \mathbb{Z} \det(A^k) = \det(A)^k$$

Théorème 4

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\det(A) = \det(A^T)$.

Théorème 5

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \geq 2$, $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$. Pour $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ on note $A_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ déduite de A en supprimant la i ème ligne et la j ème colonne.

1. $\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \det A_{i,j}$ (développement par rapport à la j ème colonne)
2. $\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \det A_{i,j}$ (développement par rapport à la i ème ligne)

Corollaire 3

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors $\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$.

II.3 Déterminant et espace vectoriel**Définition 3**

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension n et $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille de n vecteurs. Soit \mathcal{B} une base. On appelle déterminant de \mathcal{F} dans la base \mathcal{B} le nombre $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) = \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n))$.

Proposition 4

Soit \mathcal{B} une base de E et \mathcal{B}' une famille de n vecteurs.

$$\mathcal{B}' \text{ est une base de } E \text{ ssi } \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \neq 0$$

Théorème 6

Deux matrices carrées semblables ont le même déterminant.

Définition 4

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec E un \mathbb{K} -ev de dimension n . Toutes les matrices de f (ie dans n'importe quelle base) ont le même déterminant, on le note $\det(f)$ et on l'appelle déterminant de f .

Proposition 5

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension n .

1. $\det(\text{Id}_E) = 1$
2. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$.
3. $\det(f \circ g) = \det(f) \det(g)$
4. f est bijective (on dit aussi inversible) ssi $\det(f) \neq 0$ et alors $\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}$.