Table des matières

Dans ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, n un entier naturel non nul.

I Trace

I.1 Trace d'une matrice

I.1.1 Définition
Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle la trace de A et on note $\mathrm{tr}(A)$ le **nombre** $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,i}$ qui est la somme de ses coefficients diagonaux.

I.1.2 Exemple
Pour $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, calculer $\mathrm{tr}(A^T A)$.

I.1.3 Proposition
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. $\mathrm{tr}(A^T) = \mathrm{tr}(A)$
2. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}\ \ \mathrm{tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha\,\mathrm{tr}(A) + \beta\,\mathrm{tr}(B)$.

Ainsi la trace est une forme linéaire : $\mathrm{tr} \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$

Exercice 1
Montrer que le noyau de la trace est un hyperplan et en donner une base.

I.1.4 Effet du produit

Montrer que dans le cas général on a pas $\mathrm{tr}(A^2) = \mathrm{tr}(A)^2$.

I.2 Trace d'un endomorphisme

I.2.1 Théorème (Trace d'un produit)
Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ (remarquer les tailles).

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$$

Preuve.
Notons $C = AB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $D = BA \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ avec $A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j})$ et $C = (c_{i,j}), D = (d_{i,j})$.

Pour $(i,j) \in [\![1, n^2]\!]$ on a $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$ et donc $\mathrm{tr}(C) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,i} = \sum\limits_{k=1}^{p}\sum\limits_{i=1}^{n} b_{k,i} a_{i,k}$ en échangeant les sommes.

De la même manière, $\mathrm{tr}(D) = \sum\limits_{i=1}^{p}\sum\limits_{k=1}^{n} b_{i,k} a_{k,i}$. Au nom des indices près (qui sont des variables muettes, rappelons le) on a bien $\mathrm{tr}(C) = \mathrm{tr}(D)$. ∎

Exercice 2
Montrer que $\mathrm{tr}(A^T B) = \mathrm{tr}(AB^T)$, dans le cas de matrices carrées, avec les notations du théorème.

En déduire la valeur de cette trace dans le cas où A est symétrique et B anti-symétrique.

I.2.2 Définition
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices carrées.

On dit que A et B sont semblables ssi il existe une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A = P^{-1}BP$.

I.2.3 Lever lambiguïté

La définition précédente n'est pas bien formulée !

En effet, la formule donnée n'est pas symétrique en première lecture, alors qu'on dit que "A et B **sont** semblables" (ce qui implique que A est semblable à B et B semblable à A).

Une lecture plus éclairée montre qu'avec les notations de la définition, si on peut écrire $A = P^{-1}BP$ alors on a aussi $B = PAP^{-1} = Q^{-1}AQ$ en posant comme matrice inversible la matrice $Q = P^{-1}$.

I.2.4 Matrices semblables

Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables alors $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$.

En effet, si on a $A = P^{-1}BP$ pour une matrice inversible P (voir P comme une matrice de passage), alors $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}((P^{-1}B)B) = \mathrm{tr}(P(P^{-1}B)) = \mathrm{tr}(B)$.

I.2.5 Invariants

On peut maintenant dire que deux matrices semblables ont :

1. le même rang
2. la même trace

I.2.6 Définition-Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$. Le scalaire $\mathrm{tr}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$ ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ de E choisie pour calculer la matrice. On le note $\mathrm{tr}(f)$.

I.2.7 Exemple

Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & XP' \end{array} \right.$. Calculer $\mathrm{tr}(f)$.

Exercice 3

Soit p un projecteur dans E de dimension finie. Montrer que $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$.

I.2.8 Linéarité

Pour $f, g \in \mathcal{L}(E)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ on a $\mathrm{tr}(\alpha f + \beta g) = \alpha\,\mathrm{tr}(f) + \beta\,\mathrm{tr}(g)$.

II Déterminant

II.1 Déterminant de taille n

II.1.1 Définition-Proposition

Il existe une unique application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ telle que

1. $\det(I_n) = 1$
2. det est linéaire par rapport à chaque colonne.
3. det est anti-symétrique ie change de signe si on échange deux colonne de sa variable.

II.1.2 Conséquences de la définition

Notons $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

— Si on a $C_i = 0$ pour un certain i alors $\det(A) = 0$ par linéarité par rapport à la $i$ème colonne.

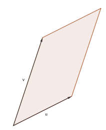
— Si on a $C_i = C_j$ pour $i \neq j$ alors $\det(A) = -\det(A)$ par échange de ces deux colonnes donc $\det(A) = 0$.

II.1.3 Exemple

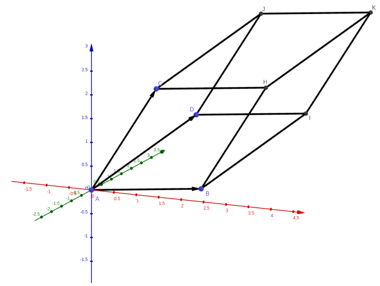
Calculer $\begin{vmatrix} 7 & -42 \\ -3 & 18 \end{vmatrix}$

II.1.4 Interprétation géométrique

En dimension 2 : il s'agit de l'aire (algébrique, ie on obtient un nombre négatif dans le cas d'un sens indirect) d'un parallélogramme



En dimension 3 :il s'agit du volume (algébrique) d'un parallélépipède. Dans la figure suivante, on construit un parallélépipède sur les 3 vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ et $|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})|$ (où les coordonnées sont calculées dans la base canonique) vaut le volume du parallélépipède.



II.1.5 Notation

Comme en dimension 2 et 3, on note un déterminant sous forme d'un tableau de nombre entouré de barres verticales.

II.1.6 Proposition (Opérations sur les déterminants)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On fait subir une opération élémentaire sur les colonnes de A et on note A' la matrice obtenue.

1. Si l'opération est $C_i \leftrightarrow C_j$ avec $i \neq j$ alors $\det(A') = -\det(A)$.
2. Si l'opération est $C_i \leftarrow \lambda C_i$ avec $\lambda \neq 0$ alors $\det(A') = \lambda \det(A)$
3. Si l'opération est $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ et $i \neq j$ alors $\det(A') = \det(A)$.

II.1.7 Corollaire
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$

II.1.8 Calcul en pratique

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On réduit A par colonnes pour calculer son déterminant. Attention aux opérations d'échange ou de multiplication par un scalaire.

II.1.9 Exemple

$$\text{Calculer } \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

II.1.10 Théorème
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est inversible ssi $\det(A) \neq 0$.

Preuve.
En reprenant les notations de II.1.6, on remarque que $\det(A) = 0 \iff \det(A') = 0$ Réduisons la matrice par colonne et notons R la matrice réduite. On a $\det(R) = 0 \iff \det(A) = 0$.

$A \in Gl_n(\mathbb{K}) \iff R = I_n$. Ainsi si $A \in GL_n(\mathbb{R})$ alors $\det(A) \neq 0$ car $\det(I_n) = 1 \neq 0$.

Supposons au contraire que $A \neq GL_n(\mathbb{K})$. Alors R possède au moins une colonne nulle (autant que la dimension du noyau de A d'ailleurs) et $\det(R) = 0$ donc $\det(A) = 0$. ■

II.1.11 Remarque

Le déterminant est toujours une expression polynomiale des coordonnées (s'exprime comme produits et sommes des coordonnées de la matrice)

II.1.12 Exemple
Calculer le déterminant de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Notons Δ ce déterminant. On factorise la première colonne par 2 puis on effectue les opérations $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$, $C_3 \leftarrow C_3 + C_1$, $C_4 \leftarrow C_4 - 3C_1$ et alors

$$\Delta = 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

On effectue maintenant $C_3 \leftarrow C_3 + 2C_2$ et $C_3 \leftarrow C_3 + C_2$ et alors

$$\Delta = 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

on peut maintenant factoriser par -1 la colonne C_3 puis effectuer l'opération $C_4 \leftarrow C_4 - 2C_3$ pour obtenir

$$\Delta = 2 \times (-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Il reste à factoriser par 3 la dernière colonne et $\Delta = 2 \times (-1) \times 3 = -6$

II.1.13 Proposition
Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux.

Preuve.
Remarquer que le déterminant est nul ssi un des coefficient diagonaux est nul ssi la matrice triangulaire n'est pas inversible.

Dans ce cas d'une matrice inversible, le calcul est direct, sur le même modèle que l'exemple, que la matrice soit triangulaire inférieure ou supérieure. ■

II.1.14 Exemple
Trouver à quelle condition sur $a \in \mathbb{C}$ la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ -1 & a^2 & a \end{pmatrix}$ est inversible.

Après l'opération $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$ on a $\det(A) = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ -1 & a^2 & a+1 \end{vmatrix}$ Après $C_1 \leftarrow C_1 - aC_2$ on obtient

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1-a^2 & a & 0 \\ -1-a^3 & a^2 & a+1 \end{vmatrix}$$

Après échange des deux premières colonnes, on obtient une matrice triangulaire et donc

$$det(A) = -1 \times (1-a^2) \times (a+1)$$

remarquer le signe - dû à l'échange de colonnes.

Finalement $A \in GL_3(\mathbb{C}) \iff \det(A) \neq 0 \iff a \neq \pm 1$.

II.1.15 Méthode

Une première méthode de calcul du déterminant :

1. Echelonner la matrice par opérations élémentaires (attention à la valeur du déterminant qui change parfois)
2. Calculer le produit des coefficients diagonaux.

II.2 Propriétés calculatoires

II.2.1 Théorème
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. Plus généralement, le déterminant d'un produit de matrices est égal au produit des déterminants.

Preuve.
Si A n'est pas inversible, AB non plus et donc le résultat est vrai.

Sinon, considérons $f \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ (C_1, \dots, C_n) & \mapsto & \frac{\det(AC_1,\dots,AC_n)}{\det(A)} \end{array} \right.$.

Alors $f(I_n) = 1$, si on échange deux colonne de M, f change de signe. De plus, f est linéaire par rapport à chaque colonne par composition et produit par une constante ($X \mapsto AX \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ et le déterminant est linéaire par rapport à cette colonne).

Ainsi $f = \det$. TADAM !

On prouve l'affirmation générale par une récurrence immédiate. ■

II.2.2 M-Attention

On a surtout pas $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$.

II.2.3 Corollaire
Si A est inversible alors $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Dans ce cas, on a également

$$\forall k \in \mathbb{Z} \ \det(A^k) = \det(A)^k$$

Preuve.
On a directement $\det(A)\det(A^{-1}) = 1$ ce qui prouve le cas $k = -1$, le seul qu'il manquait dans le théorème précédent. ■

II.2.4 Théorème
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\det(A) = \det(A^T)$.

Preuve.
Hors programme

1. On a $A \in GL_n(\mathbb{K}) \iff A^T \in GL_n(\mathbb{K})$. Ainsi $\det(A) = 0 \iff \det(A^T) = 0$. Dans toute la suite on suppose que A est inversible.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Rappelons que les matrices élémentaires sont d'un des trois type suivant : $E_{i,\lambda} = \mathrm{diag}(1, \dots, 1, \lambda, 1, \dots, 1)$ (le $\lambda \neq 0$ en $i$ème position, cette matrice traduit l'opération $L_i \leftarrow \lambda L_i$), $E_{i,j}$ qui est la matrice I_n ayant subit l'opération $L_i \leftrightarrow L_j$ (traduit la dite opération) ou $E_{i,j,\lambda}$ qui la matrice I_n ayant subit l'opération $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.

   Un calcul direct montre que ${E_{i,\lambda}}^T = E_{i,\lambda}$ et donc ces deux matrices ont le même déterminant, $\det(E_{i,j}) = -1 = \det({E_{i,j}}^T)$ (à calculer par un échange

de colonnes pour retrouver l'identité) et $\det(E_{i,j,\lambda}) = 1 = \det({E_{i,j,\lambda}}^T)$ (ces matrices sont triangulaires, l'une inférieure l'autre supérieure et avec des 1 sur la diagonale).
Ainsi le théorème est vrai pour les matrices élémentaires.

3. Rappelons que l'on suppose A inversible. Alors on peut écrire $A = E_r E_{r-1} \dots E_1$, un produit de matrices élémentaires.
Alors $A^T = {E_1}^T {E_2}^T \dots {E_r}^T$. Le théorème II.2.1, ainsi que le point précédent permettent de conclure à l'égalité souhaitée. ∎

II.2.5 Conséquences

On peut maintenant effectuer des opérations élémentaires sur les lignes au même titre que sur les colonnes, avec les mêmes effets.

II.2.6 Théorème
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \geqslant 2$, $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$. Pour $i, j \in [\![1,n]\!]^2$ on note $A_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ déduite de A en supprimant la $i$ème ligne et la $j$ème colonne.

1. $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det A_{i,j}$ (développement par rapport à la $j$ème colonne)
2. $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det A_{i,j}$ (développement par rapport à la $i$ème ligne)

Preuve.
Admis. Une idée de preuve (un peu pénible, mais pas si difficile) : on reprend les notations de II.1.6 et on prouve le premier point pour j fixé. On prouve alors que l'application de la formule à A' est l'opposé de celle à A pour un échange de colonne et donne le même résultat pour une combinaison de colonnes. Ainsi la formule est vraie pour A' ssi elle l'est pour A. Il suffit ensuite de réduire A et de remarquer que la formule est triviale pour l'identité. ∎

II.2.7 Tableau des signes

On résume souvent les signes qui apparaissent dans cette formule par

$$\begin{vmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ \vdots & & & \end{vmatrix}$$

II.2.8 Exemple
Calculer le déterminant $d = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$ On effectue $C_3 \leftarrow C_3 - 4C_1$ et on développe par rapport à la 3ième colonne : $d = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & -5 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (3 \times 1 - 2 \times (-5)) = 13$.

II.2.9 Méthode

Une deuxième méthode de calcul du déterminant : Appliquer bêtement une des formules précédente.

Une bonne idée sera de faire apparaître des 0 sur une ligne ou colonne pour réduire le nombre de termes dans le développement.

II.2.10 Exemple
Calculer le déterminant $d_n = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 0 & \dots & & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & 1 & -3 & 2 \\ 0 & & \dots & & 1 & -3 \end{vmatrix}_{[n]}$.

Pour $n = 1$ il s'agit d'un nombre et $d_1 = -3$. Pour $n = 2$, un calcul direct donne $d_2 = 7$.

On effectue, pour $n \geqslant 3$ un développement par rapport à la première colonne.

$$d_n = (-3)d_{n-1} - 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \dots & & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & 1 & -3 & 2 \\ 0 & & \dots & & 1 & -3 \end{vmatrix}_{[n-1]}$$

et un développement par rapport à la première ligne donne maintenant

$$d_n = -3d_{n-1} - 2d_{n-2}$$

Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2, dont les racines de l'équation caractéristiques ($r^2 = -3r - 2$) sont -1 et -2.

En utilisant les deux conditions initiales précédente, on trouve $d_n = 2(-2)^n - (-1)^n$ pour tout $n \geqslant 1$.

II.2.11 Corollaire
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors $\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$.

Preuve.
Immédiat par récurrence sur la taille de A et utilisant les propriétés calculatoires de la conjugaison (somme, produit). ■

II.3 Déterminant et espace vectoriel

II.3.1 Définition
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_n)$ une famille de n vecteurs. Soit $\mathcal{B}$ une base. On appelle déterminant de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$ le nombre $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_n) = \det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_n))$.

II.3.2 Lien avec la géométrie
Ce que l'on appelait déterminant d'une famille dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ est en fait le déterminant dans la base canonique. Rappel : dans $\mathbb{R}^2$, $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ ssi $\vec{u}, \vec{v}$ sont colinéaires.

II.3.3 Proposition
Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une famille de n vecteurs.

$$\mathcal{B}' \text{ est une base de } E \text{ ssi } \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \neq 0$$

II.3.4 Exercice
Que vaut $\det_{\mathcal{B}'} \mathcal{B}$ *dans ce cas ?*

II.3.5 Exemple
Montrer que $(\binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k})_{k \in [\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. Dans la base canonique, la matrice est triangulaire supérieure et on peut calculer son déterminant par produit des coefficients diagonaux.

II.3.6 Théorème
Deux matrices carrées semblables ont le même déterminant.

Preuve.
Posons $A = P^{-1}BP$ pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in GL_n(\mathbb{K})$.

On a alors $\det(A) = \det(P^{-1}) \det(B) \det P = \frac{1}{\det(P)} \det(P) \det(B) = \det(B)$. ■

II.3.7 Invariants
Nous voilà avec 3 invariant de changement de base pour les endomorphismes : le rang, la trace et le déterminant.

II.3.8 Définition
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n. Toutes les matrices de f (ie dans n'importe quelle base) ont le même déterminant, on le note $\det(f)$ et on l'appelle déterminant de f.

II.3.9 Exemple
On considère l'application $T : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & M^T \end{array} \right.$. Calculer son déterminant.

En prenant $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathcal{B} = (M_1, M_2, M_3, M_4)$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Après un échange de colonne, $\det(T) = -1$.

II.3.10 Proposition
Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension n.

1. $\det(Id_E) = 1$
2. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$.
3. $\det(f \circ g) = \det(f) \det(g)$
4. f est bijective (on dit aussi inversible) ssi $\det(f) \neq 0$ et alors $\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}$.

II.3.11 Puissances
On a directement $\det(f^n) = \det(f)^n$ qui est valable par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$ et même $n \in \mathbb{Z}$ si f est bijective.