Devoir surveillé n°1

Durée : 4H. Calculatrices interdites. **Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction et la propreté : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.**

Lisez l'énoncé attentivement et en entier **AVANT** de commencer chaque exercice.

Exercice 1 (Questions de cours)

1. Rappeler la valeur des sommes de séries $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ en précisant dans chaque cas pour quelles valeurs de x ces calculs sont valables.
2. Justifier, en utilisant un résultat précis du cours, que $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$.
3. Énoncer le théorème du rang pour une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Exercice 2

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour n entier naturel, $n \geqslant 2$, on pose $u_n = \frac{x^n}{n(n-1)}$. Le but de cet exercice est d'étudier la série $\sum u_n$.

1. Cas $x = 1$. On suppose dans cette question que $x = 1$.
   (a) Montrer que $\sum u_n$ est une série convergente.
   (b) Calculer $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)}$. On pourra utiliser une décomposition en éléments simples sur $\frac{1}{n(n-1)}$.
2. Cas $x = -1$. Montrer que $\sum \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$ est convergente.
3. Montrer que si $x \in]-1,1[$ alors $\sum u_n$ est encore convergente.
4. Montrer que si $|x| > 1$ alors $\sum u_n$ est divergente.
5. Soit $x \in]-1,1[$ et N un entier naturel, $N \geqslant 2$. On note $S_N(x) = \sum\limits_{n=2}^{N} \frac{x^n}{n(n-1)}$.
   (a) Justifier brièvement que S_N est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ puis exprimer S_N' et S_N''.
   (b) Montrer que $S_N''(x) = \frac{1}{1-x} - x^{N-1}\frac{1}{1-x}$.
   (c) Que vaut $\lim\limits_{N\to+\infty} S_N''(x)$?
6. On suppose maintenant que $x \geqslant 0$, c'est à dire $x \in [0,1[$.
   (a) Calculer $\int_0^x S_N''(t)\mathrm{d}t$ en fonction de S_N' puis montrer que
   $$0 \leqslant \int_0^x \frac{t^{N-1}}{1-t}\mathrm{d}t \leqslant x^{N-1} \times (-\ln(1-x))$$
   (b) En déduire un encadrement de $S_N'(x)$ puis montrer que $\lim\limits_{N\to+\infty} S_N'(x) = -\ln(1-x)$.
   (c) Calculer $\int_0^x \ln(1-t)\mathrm{d}t$. On pourra dans un premier temps poser $u = 1-t$.
   (d) Au vu des résultats sur S_N' et S_N'' que pouvez-vous conjecturer sur $\lim\limits_{N\to+\infty} S_N(x)$?
   (e) La conjecture précédente est-elle cohérente avec le résultat $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1$?

Exercice 3

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une racine carrée de A ssi $R^2 = A$.

Partie I : quelques généralités

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que la matrice $M_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$ est une racine carrée de I_2.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et R une racine carrée de A. Montrer que A est inversible ssi R est inversible.
3. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. on suppose qu'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A = P^{-1}BP$. Soit $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que R est une racine carrée de A ssi PRP^{-1} est une racine carrée de B.
4. Soit $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ avec $\alpha < \beta < \gamma$. Montrer que si $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $DM = MD$ alors M est une matrice diagonale.

Partie II : étude d'un cas particulier

On pose $A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

1. Calculer le rang de A. On note $\ker(A) = \{X \in \mathbb{R}^3 |\ AX = 0_{\mathbb{R}^3}\}$ le noyau de A. Quelle est sa dimension ?
2. Donner une base de $\ker(A)$.
3. Résoudre l'équation $AX = X$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, en donnant une base de l'ensemble des solutions.
4. Nous venons de calculer $\ker(M)$ pour une certain matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Exprimer M en fonction de A.
5. Reprendre les deux questions précédentes pour l'équation $AX = 16X$.
6. On pose $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$
7. On note $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A, ie. $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f)$ et $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ X & \mapsto & AX \end{array} \right.$
   Calculer $D = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
8. On note $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{B})$. Expliciter le lien entre A, D et P.
9. Supposons que $S \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ soit une racine carrée de D. Montrer que $SD = DS$ puis déduire de la première partie toute les racines carrées de D.
10. Exprimer les racines carrées de A en fonction de P.

Exercice 4
Dans tout l'exercice, sauf avis contraire, n désigne un entier naturel.

Les parties de cet exercice ne sont pas indépendantes. Vous pouvez vous servir des résultats des parties précédentes même si vous n'avez pas réussi à les démontrer.

Partie I : Quelques formules trigonométriques

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. En calculant la forme algébrique de $e^{ia}e^{ib}$, retrouver les formules trigonométriques donnant $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$.
2. Exprimer $\cos(2a)$ en fonction de $\cos(a)$ puis en fonction de $\sin(a)$.
3. Exprimer $\cos(3a)$ en fonction de $\cos(a)$ uniquement.
4. Rappeler $\cos(a-b)$ et en déduire la formule de linéarisation de $\cos(a)\cos(b)$ (rappel : on veut obtenir une expression où il n'y a pas de produit entre fonctions trigonométriques, mais seulement une somme ou une différence).
5. Calculer la limite lorsque $\theta \to 0$ de $\frac{n\sin(n\theta)}{\sin\theta}$ (on suppose pour cette question que $n \neq 0$).

Partie II : Une famille de polynômes

Soit $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par

$$T_0 = 1, T_1 = X, \forall k \in \mathbb{N}\backslash\{0\} T_{k+1}(X) = 2XT_k(X) - T_{k-1}(X).$$

1. Déterminer les polynômes T_2, T_3 et T_4.
2. Calculer $T_n(1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Calculer le degré de T_n et son coefficient dominant que l'on notera $c(T_n)$.
4. Il est temps de faire le lien avec la première partie.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, T_n$ vérifie
   $$\forall\theta \in \mathbb{R}\ T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$$
   (b) Montrer que $T_n'(1) = n^2$. On pourra dériver la relation $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ par rapport à θ puis faire tendre θ vers 0 .
5. Nous allons maintenant chercher les racines de ces polynômes. On suppose dans cette question uniquement que $n \neq 0$

(a) A quelle condition sur $\theta \in \mathbb{R}$ a-t-on $T_n(\cos\theta) = 0$?

(b) Montrer (proprement) que les nombres de la forme $\lambda_p = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{p\pi}{n}\right)$ avec $p \in [\![0, n-1]\!]$ sont tous distincts.

(c) Montrer que T_n possède n racines distinctes dans $[-1, 1]$.

(d) On déduit que la question précédente que T_n est scindé sur $\mathbb{R}$ et que toutes ses racines sont simples. Alors on peut écrire, pour $n > 0$

$$T_n(X) = 2^{n-1} \prod_{p=0}^{n-1} \left(X - \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{p\pi}{n}\right)\right)$$

A quoi correspond le facteur 2^{n-1}?

Partie III : Calcul de sommes

Nous allons étudier plus précisément la série $\sum \frac{1}{n^2}$ qui est notoirement convergente.

Posons $\ell = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

1. On s'intéresse dans cette première question à la série $\sum \frac{1}{(2n+1)^2}$.
   (a) Montrer que cette série est convergente.
   (b) On pose, pour $n \in \mathbb{N}, I_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(2k+1)^2}$. On pose également $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.
   Exprimer pour tout n, le nombre S_{2n} en fonction de S_n et I_n uniquement.
   (c) En déduire que la série $\sum \frac{1}{(2k+1)^2}$ converge vers $\ell' = \frac{3}{4}\ell$
2. On fixe $n > 0$ et on prend x dans un intervalle contenant 1 et où $T_n(x) > 0$. Rappelons que l'on a noté $\lambda_p = \cos\left(\frac{(2p+1)\pi}{2n}\right)$ pour $p \in [\![0, n-1]\!]$. Montrer par une dérivation judicieuse que

$$\frac{T_n'(x)}{T_n(x)} = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{x - \lambda_p}.$$

3. Montrer que

$$\sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{1 - \cos\left(\frac{(2p+1)\pi}{2n}\right)} = n^2.$$

4. (a) Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on a $1 - \cos(\theta) = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$ et pour θ convenable (à préciser), $\frac{1}{\tan^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta} - 1$.
   (b) En déduire les valeurs de $\sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2p+1)\pi}{4n}\right)}$ et $\sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{\tan^2\left(\frac{(2p+1)\pi}{4n}\right)}$
5. (a) Montrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ on a $\sin x \leqslant x \leqslant \tan x$.
   (b) En déduire un encadrement de la somme $\sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{\left(\frac{(2p+1)\pi}{4n}\right)^2}$ puis que

$$\frac{\pi^2(2n-1)}{16n} \leqslant I_n \leqslant \frac{\pi^2}{8}$$

6. Calculer ℓ' et montrer que $\ell = \frac{\pi^2}{6}$.