Devoir maison 3

A rendre le au plus tard le 04/10/2022.

Exercice 1
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ ainsi que l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM - MA \end{array} \right.$.

1. Étude de $\ker(\varphi)$
   (a) Montrer que φ est une application linéaire.
   (b) Préciser la base canonique $\mathcal{B}_c$ de $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et calculer $C = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\varphi)$.
   (c) Calculer $\mathrm{tr}(\varphi)$.
   (d) Quel est le rang de φ ?
   (e) Calculer $\ker(C)$ (l'ensemble des solutions du système homogène associé à C), puis $\ker(\varphi)$ (l'ensemble des matrices correspondantes).
   Que vérifient les matrices de $\ker(\varphi)$ par rapport à A ?
2. On note $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ l'application canonique associée à A, ie $f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ X & \mapsto & AX \end{array} \right.$.
   (a) Montrer que $\mathcal{B} = (u, v) = (\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et calculer $D = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
   (b) On note $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(\mathcal{B})$ la matrice de passage de $\mathcal{B}_2$ (la base canonique de $\mathbb{R}^2$) à $\mathcal{B}$. Préciser P ainsi que le lien entre A, D, P et P^{-1}.
   (c) Trouver les matrices $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $DM = MD$.
   (d) Montrer que pour une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\varphi(M) = 0 \iff D$ commute avec $P^{-1}MP$.
   (e) En déduire une base de $\ker(\varphi)$ (sans utiliser la question 1...)

Indications :

1. (a)
   (b) Il s'agit de 4 matrices notées $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$.
   (c) Ce n'est pas 0, ni $\mathrm{tr}(\varphi(M))$, mais bien $\mathrm{tr}(\varphi)$ que l'on demande.
   (d) C'est également le rang d'une matrice...
   (e) On sait écrire une colonne correspondant à une matrice pour écrire la matrice de φ. Il s'agit ici d'écrire des matrices correspondant à des colonnes.
2. (a) Attention à bien exprimer $f(u)$ et $f(v)$ en fonction de u et v
   (b) Cours. Attention aux bases : l'une est l'ancienne, l'autre la nouvelle.
   (c) On obtient un système à 4 inconnues.
   (d) Preuve "thérorique". On suppose un côté pour prouver l'autre, puis ensuite....
   (e)