Table des matières

I Fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$

En pratique, on considère des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

I.1 Continuité, dérivabilité

Définition 1
Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$ une fonction, $a \in I$ et $b \in \mathbb{R}^n$. On dit que f admet b comme limite en a (notations habituelles) ssi

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha > 0 \forall t \in I \ |t-a| \leqslant \alpha \Rightarrow \|f(t) - b\| \leqslant \varepsilon$$

Dans le cas où b existe, elle est unique et vaut $f(a)$. On dit alors que f est continue en a.

f est dite continue sur I si elle est continue en tout point a de I.

Proposition 1
Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$, $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$ (les **fonctions** $f_1, \dots, f_n$ sont appelées applications coordonnées). Soit $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ et $a \in I$ où une borne de I.

$$\lim_{t \to a} f(t) = b \iff \forall i \in [\![1, n]\!] \ \lim_{t \to a} f_i(t) = b_i$$

I.1.1 Remarque

On retrouve le fait (connu) que la continuité des fonctions à valeurs complexes est équivalente à celles des parties réelle et imaginaire. De manière plus générale, f est continue ssi toutes ses applications coordonnées sont continues.

Définition 2 (Dérivabilité)
La définition de la dérivabilité (tout court, à gauche ou à droite) est mot pour mot la même que pour des fonctions à valeurs réelles. Seule change la définition du symbole lim utilisé. Remarquons que les quotients du type $\frac{f(t)-f(a)}{t-a}$ sont bien définis car $\frac{1}{t-a}$ est un réel (ce quotient est bien définit dès que f est à valeurs dans un $\mathbb{R} - ev$: on doit pouvoir faire des produits par des réels et une soustraction sur les valeurs de f).

Quand f est dérivable sur I, la fonction dérivée f' est à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

I.1.2 Cinématique

Si la fonction f étudiée représente les coordonnées d'un mobile au cours du temps, alors f' est le vecteur vitesse du mouvement.

Proposition 2
$f : I \to \mathbb{R}^n$ est dérivable (en un point ou sur I) ssi ses fonctions coordonnées $f_1, \dots, f_n$ le sont et on a alors $f' = \begin{pmatrix} f_1' \\ \vdots \\ f_n' \end{pmatrix}$. f est alors continue.

Exemple 1
$t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Reconnaître la fonction à valeurs complexes associée.

Proposition 3
L'application $D : f \mapsto f'$ est linéaire de $\mathcal{D}(I, \mathbb{R}^n)$ dans $(\mathbb{R}^n)^I$ ie pour $f, g : I \to \mathbb{R}^n$ dérivables et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$.

Proposition 4
Soient $f, g \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R}^n)$ et $u \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R}), v \in \mathcal{D}(J, I)$ (v est à valeurs dans I).

On note $\langle u,\ v \rangle$ le produit scalaire de deux vecteurs.

1. $u \times f$ est dérivable et $(uf)' = u'f + uf'$.
2. Si u ne s'annule pas $\frac{1}{u} f$ est dérivable et $\left(\frac{1}{u} f\right)' = \frac{1}{u^2}(uf' - u'f)$
3. $f \circ v$ est dérivable sur J et $(f \circ v)' = v' \times f' \circ v$
4. $< f, g >$ est dérivable et $(< f, g >)' = < f', g > + < f, g' >$
5. (cas $n = 3$) $f \wedge g$ est dérivable et $(f \wedge g)' = f' \wedge g + f \wedge g'$.
6. (cas $n = 2$) $\det(f, g)$ est dérivable et $(\det(f, g))' = \det(f', g) + \det(f, g')$.

Exemple 2
Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$ dérivable. Etudier la dérivabilité et la dérivée de $\|f\|$.

I.2 Taylor-Young

I.2.1 Dérivées d'ordre supérieur

On peut étendre de manière similaire (en reprenant les même définitions, puis on constate qu'il suffit de vérifier la propriété sur les fonctions coordonnées) les notions de dérivées d'ordre k, de classe $\mathcal{C}^k$ pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

I.2.2 Combinaison linéaire, produit

Les formules de dérivée k-ième usuelles s'appliquent encore (avec les même preuve) dans le cas d'une combinaison de fonctions $\mathcal{D}^k(I, \mathbb{R}^n)$ et dans le cas du produit uf où $u \in \mathcal{D}^k(I, \mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{D}^k(I, \mathbb{R}^n)$ (l'idée est qu'il faut s'assurer que les opérations en jeu possèdent un sens : pas de produit de vecteur, on ne somme pas un nombre et un vecteur...)

I.2.3 $o_a(1)$

Dans la suite du chapitre, la notation $o_a(1)$ représente une fonction (à valeurs dans $\mathbb{R}^n$) dont la limite en a est $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Il s'agit donc d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ dont toutes les coordonnées sont des $o_a(1)$ (celui que l'on connaissait). Plus généralement si g est à valeurs réelles, $o_a(g)$ sera une fonction vectorielle dont toutes les coordonnées sont des $o_a(g)$ au sens habituel.

Théorème 1 (Taylor-Young)
Soit $f \in \mathcal{C}^p(I, \mathbb{R}^n)$ et $a \in I$ Alors

$$f(t) = f(a) + (t-a)\underbrace{f'(a)}_{\text{vitesse}} + \frac{(t-a)^2}{2!}\underbrace{f''(a)}_{\text{accélération}} + \cdots + \frac{(t-a)^p}{p!} f^{(p)}(a) + (t-a)^p o_a(1)$$

En pratique, on écrit le développement limité coordonnée par coordonnée

II Fonctions de deux variables

On considère ici des fonctions de deux variables $f : \left\{ \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array} \right.$ où U est un ensemble de couples, $U \subset \mathbb{R}^2$.

II.1 Dérivées partielles

Définition 3

Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{R}^n \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array} \right.$ où $U \subset \mathbb{R}^2$. Soit $a = (x_0, y_0)$ un point de U (avec une condition, voir plus tard dans l'année).

On dit que f possède une dérivée partielle par rapport à x en $a = (x_0, y_0)$ ssi la fonction $x \mapsto f(x, y_0)$ est dérivable en x_0. Ce nombre dérivé est alors noté $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$. on considère en fait que y est fixé à y_0 et on dérive par rapport à x.

On définit de même $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

II.1.1 Remarque

1. Il s'agit toujours de se ramener à une fonction d'une variable, en fixant les autres au point qui nous intéresse.
2. $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$

II.1.2 Preuve de dérivabilité partielle

Nous utiliserons classiquement les mêmes arguments pour prouver la dérivabilité partielle que pour les fonctions d'une variable : opération, composition.

II.2 Gradient

Définition 4
Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{R}$. Si f possède des dérivées partielles en $(x_0, y_0) \in U$, le gradient de f en (x_0, y_0) (noté $\overrightarrow{grad} f(x_0, y_0)$) est le vecteur $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$ (on le note en ligne).

En physique, le gradient est parfois noté ∇f