Table des matières

I Coniques

I.1 Définition monofocale

Définition 1
Soit F un point et $\mathcal{D}$ une droite qui ne passe pas par F. Soit également $e \in]0, +\infty[$. L'ensemble des points $\mathcal{C} = \{M |\ MF = ed(M, \mathcal{D})\}$ est appelé coniquede foyer$F$, de directrice$\mathcal{D}$ et d'excentricité e.

— si $e < 1$, on dit que $\mathcal{C}$ est une ellipse.
— si $e = 1$ on dit que $\mathcal{C}$ est une parabole.
— si $e > 1$ on dit que $\mathcal{C}$ est une hyperbole.

Dans toute cette première partie du cours, nous conserverons ces notations.

I.2 Équation cartésienne dans le repère focal

Proposition 1 (Intersection avec l'axe focal)
Soit $\mathcal{C}$ une conique d'axe $\mathcal{D}$, de foyer F et d'excentricité e.

1. Si $\mathcal{C}$ est une parabole (ie. $e = 1$), alors il existe un unique point d'intersection entre l'axe focal et $\mathcal{C}$ appelé sommet de la parabole. Ce sommet est de coordonnées $\begin{pmatrix} -\frac{\|HF\|}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{h}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{p}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ dans le repère focal.
2. Si $\mathcal{C}$ n'est pas une parabole, alors il existe exactement deux points d'intersection entre l'axe focal et $\mathcal{C}$ appelés sommets de la conique.

I.3 Équations réduites

Théorème 1 (Équation réduite d'une parabole)
Soit $\mathcal{C}$ une parabole. Notons S son unique sommet.

En notant $p = h = d(F, \mathcal{D})$, l'équation réduite de $\mathcal{C}$ s'obtient dans le repère centré en S et dont les vecteurs de bases sont les même que pour le repère focal et on a, dans ce repère,

$$\mathcal{C} : y^2 = 2px$$

Dans le repère au sommet, le foyer est de coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{p}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ et la directrice d'équation $x = -\frac{p}{2}$.

Théorème 2 (Équation réduite d'une ellipse)
Soit $\mathcal{C}$ une ellipse (on a donc $e < 1$). Notons Ω le milieu de ses deux sommets.

L'équation réduite de $\mathcal{C}$ est obtenue dans le repère centré en Ω et dont les vecteurs de bases sont les même que le repère focal (on appelle repère central ce nouveau repère). Cette équation est de la forme

$$\mathcal{C} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

où a, b sont deux réels strictement positifs vérifiant $a > b$.

Théorème 3 (Équation réduite d'une hyperbole)
Soit $\mathcal{C}$ une hyperbole (on a donc $e > 1$). Notons Ω le milieu de ses deux sommets.

L'équation réduite de $\mathcal{C}$ est également obtenue dans le repère central. Cette équation est de la forme

$$\mathcal{C} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

où a, b sont deux réels strictement positifs.

Proposition 2
Une ellipse et une hyperbole sont des courbes symétriques par rapport à :

1. chacun des axes du repère central
2. leur centre

I.4 Études des courbes implicites

Définition 2
On dit qu'une courbe C du plan est définie par une équation implicite si elle est donnée par une équation de la forme

$$C : f(x, y) = 0$$

pour une certaine fonction f de classe $\mathcal{C}^1$.

Dans ce cas les points de C sont les points M du plan de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ qui vérifient $f(x, y) = 0$.

Théorème 4
Soit C une courbe du plan définie par une équation implicite $C : f(x, y) = 0$ où la fonction f est $\mathcal{C}^1$.

Soit $M_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ un point de C.

1. On dit que M_0 est un point régulier de C ssi $\overrightarrow{grad}\, f(x_0, y_0) \neq \vec{0}$.
2. Si M_0 est un point régulier de C, alors la tangente à C au point M_0 est la droite passant par M_0 et normale à $\overrightarrow{grad}\, f(x_0, y_0)$.

Proposition 3 (Tangentes à une ellipse)
On considère une ellipse $E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (les coordonnées sont donc données dans le repère central).

Soit $M_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in E$. Alors la tangente à E en M_0 est la droite d'équation

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

Proposition 4 (Tangentes à une hyperbole)
On considère une hyperbole $H : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Soit $M_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in H$. Alors la tangente à H en M_0 est la droite d'équation

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

II Courbes paramétrées

II.1 Courbes dans $\mathbb{R}^2$

Définition 3
Une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$ dans $\mathbb{R}^2$ est une fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & M(t) \end{array} \right.$. Le **support** de la courbe est $f(I)$ (l'ensemble des points $M(t)$, ou encore la trajectoire du point M) .

Définition 4
Soit f une courbe $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^2)$ et $t_0 \in I$. Si $f'(t_0) \neq \vec{0}$, on dit que le point t_0 est régulier, sinon on dit qu'il est singulier. Si tous les points de f sont régulier, f est dite régulière.

Proposition 5 (Paramétrisations des coniques)
Considérons l'ellipse $E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ et l'hyperbole $H : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

1. E est le support de la courbe paramétrée $f_E : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix} \end{array} \right.$.
2. La demi hyperbole $H_+ = H \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x \geqslant 0\}$ est le support de la courbe $f_H : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} a\,\mathrm{ch}\, t \\ b\,\mathrm{sh}\, t \end{pmatrix} \end{array} \right.$

D'après la proposition 2, l'autre demi-hyperbole s'obtient par symétrie par rapport à (Oy).

II.2 Domaine d'étude

II.3 Tangentes, variations

Définition 5
Soit $f : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée et $t_0 \in I$. On dit que f possède une demi tangente à gauche (resp. à droite) en t_0 ssi $\lim\limits_{t \to t_0^-} \frac{f(t)-f(t_0)}{\|f(t)-f(t_0)\|}$ existe (resp. limite à droite). Notons $\vec{u}_-$ et $\vec{u}_+$ ces limites quand elles existent.

La demi-tangente à gauche de f en t_0 est alors $f(t_0) + \mathrm{Vect}(\vec{u}_-)$ et la demi-tangente à droite est $f(t_0) + \mathrm{Vect}(\vec{u}_+)$, c'est à dire les droites passant par le point $f(t_0)$ est dirigées par les vecteurs $\vec{u}_-$ et $\vec{u}_+$. Si ces droites sont confondues ($\vec{u}_-$ et $\vec{u}_+$ sont colinéaires) alors la tangente à f en t_0 est définie comme étant cette même droite.

Théorème 5
Si t_0 est un point régulier de la courbe f alors f possède une tangente en t_0 dirigée par $f'(t_0)$.

II.4 Tracé

II.5 Étude en un point

II.6 Branches infinies

Définition 6
Soit $f : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée et $a \in \bar{I}$. On dit que f possède une branche infinie au voisinage de a si $\lim\limits_{t \to a} x(t)$ et $\lim\limits_{t \to a} y(t)$ existent et qu'on est dans l'un des cas suivant

1. Une des limite est infinie et l'autre finie : on obtient une asymptote qui est horizontale (lorsque seulement y tend vers l'infini) ou verticale (lorsque seulement x tend vers l'infini).

2. Ces deux limites sont infinies.
   (a) Si $\lim_{t \to a} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$ alors on dit que f possède une branche parabolique de direction (Ox).
   (b) Si $\lim_{t \to a} \frac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty$ alors on dit que f possède une branche parabolique de direction (Oy).
   (c) Si $\lim_{t \to a} \frac{y(t)}{x(t)} = \alpha \in \mathbb{R}^*$ est un réel **non nul**, il y a deux cas
      i. si $\lim_{t \to a} y(t) - \alpha x(t) = \beta \in \mathbb{R}$ alors on dit que la droite $\mathcal{D} : y = \alpha x + \beta$ est asymptote à f.
      ii. sinon on dit que f admet une branche parabolique de pente α.

Tracé de référence des coniques