Table des matières

I Coniques

I.1 Définition monofocale

I.1.1 Définition

Soit F un point et $\mathcal{D}$ une droite qui ne passe pas par F. Soit également $e \in]0,+\infty[$. L'ensemble des points $\mathcal{C} = \{M|\ MF = ed(M,\mathcal{D})\}$ est appelé conique de foyer F, de directrice $\mathcal{D}$ et d'excentricité e.

— si $e < 1$, on dit que $\mathcal{C}$ est une ellipse.

— si $e = 1$ on dit que $\mathcal{C}$ est une parabole.

— si $e > 1$ on dit que $\mathcal{C}$ est une hyperbole.

Dans toute cette première partie du cours, nous conserverons ces notations.

I.1.2 Repère adapté

On considère H le projeté orthogonal de F sur $\mathcal{D}$. Le repère focal associé à la conique $\mathcal{C}$ est le repère orthonormé direct centré en F, dont la première direction est $\overrightarrow{HF}$ (on aurait pu choisir $\overrightarrow{FH}$. Quel est l'effet ?). Le premier axe de ce repère est appelé axe focal. Il est bien évidemment perpendiculaire à $\mathcal{D}$ en H.

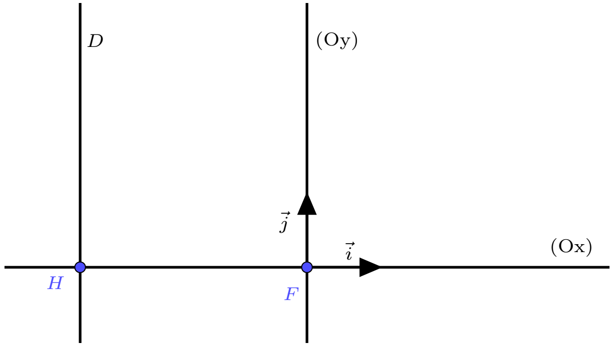


FIGURE 1 – Axe et repère focal

I.2 Équation cartésienne dans le repère focal

On cherche ici les points $M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{C}$ (avec les notations précédentes), les coordonnées sont données dans le repère focal.

Notons M' le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$.

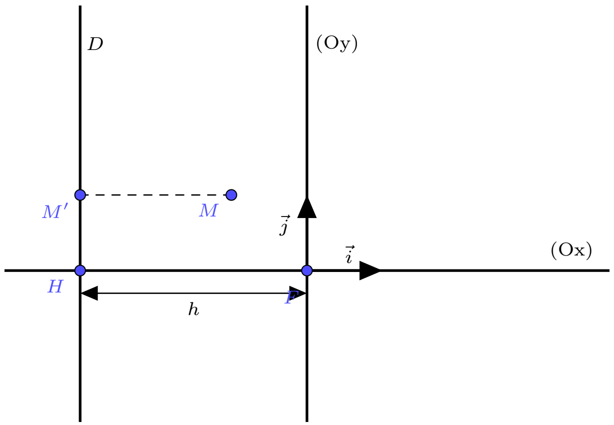


FIGURE 2 – Axe et repère focal

Notons $h = \|\overrightarrow{HF}\| = d(F,\mathcal{D})$ et ainsi $H : \begin{pmatrix} -h \\ 0 \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} -h \\ y \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C} &\iff \|\overrightarrow{MF}\| = ed(M,\mathcal{D}) \iff \|\overrightarrow{MF}\| = e\|\overrightarrow{MM'}\| \\ &\iff \|\overrightarrow{MF}\|^2 = e^2\|\overrightarrow{MM'}\|^2 \text{ car des normes sont positives} \\ &\iff x^2+y^2 = e^2((x+h)^2+0^2) \iff x^2+y^2 = e^2(x^2+2xh+h^2) \\ & x^2(1-e^2)+y^2-2e^2hx-e^2h^2 \end{aligned}$$

On note classiquement $p = eh$ que l'on appelle le *paramètre* de la conique $\mathcal{C}$ et avec cette notation on a obtenu

$$\mathcal{C} : x^2(1-e^2)+y^2-2epx-p^2 = 0$$

Notez que cette équation se réfère à des coordonnées dans le repère focal. Il faut la lire sous la forme : si un point M est de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans le repère focal, alors $M \in \mathcal{C} \iff x^2(1-e^2)+y^2-2epx-p^2 = 0$.

I.2.1 Proposition (Intersection avec l'axe focal)
Soit $\mathcal{C}$ une conique d'axe $\mathcal{D}$, de foyer F et d'excentricité e.

1. Si $\mathcal{C}$ est une parabole (ie. $e = 1$), alors il existe un unique point d'intersection entre l'axe focal et $\mathcal{C}$ appelé sommet de la parabole. Ce sommet est de coordonnées $\begin{pmatrix} -\frac{\|HF\|}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{h}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{p}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ dans le repère focal.
2. Si $\mathcal{C}$ n'est pas une parabole, alors il existe exactement deux points d'intersection entre l'axe focal et $\mathcal{C}$ appelés sommets de la conique.

Preuve.
On cherche les point M à la fois sur l'axe focal et sur $\mathcal{C}$. Ainsi il sont de coordonnées (toujours dans le repère focal) $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ et vérifient l'équation précédente

1. Cas $e = 1$. L'équation vérifiée devient $0+0^2-2px-p^2 = 1$ et la seule solution est $x = -\frac{p}{2} = -\frac{h}{2}$ car $p = eh = 1 \times h$.
2. Cas $e \neq 1$; L'équation devient cette fois $x^2(1-e^2)-2epx-p^2 = 0$ qui est bien de degré 2 car $1-e^2 \neq 1$ (rappelons ici que $e > 0$ et donc $e \neq -1$).
   Le discriminant est $4e^2p^2+4(1-e^2)p^2 = 4p^2 > 0$ et on obtient bien deux solutions distinctes (pour x, donc pour les points M correspondants également).

■

I.2.2 Milieu des sommets

Dans le cas $e \neq 1$ et avec les notations précédentes, le milieu des deux solutions est $-\frac{-2ep}{2(1-e^2)} = \frac{ep}{1-e^2}$ (avec les notations de 1ère, le milieu des deux racines réelles d'un trinôme est toujours $-\frac{b}{2a}$) et donc le milieu des sommets est de coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{ep}{1-e^2} \\ 0 \end{pmatrix}$.

I.2.3 Sommets

On peut retenir que les sommets d'une ellipse sont positionnés de part de d'autre du foyer, d'un même côté de la directrice et les sommets d'une hyperbole sont positionnés de chaque côté de la directrice et du même côté du foyer.

I.3 Équations réduites

I.3.1 Théorème (Équation réduite d'une parabole)
Soit $\mathcal{C}$ une parabole. Notons S son unique sommet.

En notant $p = h = d(F,\mathcal{D})$, l'équation réduite de $\mathcal{C}$ s'obtient dans le repère centré en S et dont les vecteurs de bases sont les même que pour le repère focal et on a, dans ce repère,

$$\mathcal{C} : y^2 = 2px$$

Dans le repère au sommet, le foyer est de coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{p}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ et la directrice d'équation $x = -\frac{p}{2}$.

Preuve.
Soit M un point du plan. On note $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ses coordonnées dans le repère focal et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ ses coordonnées dans le repère centré au sommet.

On a donc $\overrightarrow{FM} = x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{SM} = x'\vec{\imath}+y'\vec{\jmath}$. Or $\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{FS}+\overrightarrow{SM} = -\frac{h}{2}\vec{\imath}+x'\vec{\imath}+y'\vec{\jmath}$.
Ainsi on obtient les relations (changement de repère par translation)

$$\begin{cases} x = -\frac{h}{2}+x' \\ y = y' \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x' = x+\frac{h}{2} \\ y' = y \end{cases}$$

Remarquons qu'on a bien $x' = 0 \iff x = -\frac{h}{2}$

De plus, $M \in \mathcal{C} \iff y^2 - 2px - p^2 = 0 \iff y^2 = 2p(x + \frac{h}{2}) \iff (y')^2 = 2px'$ qui est exactement le résultat annoncé. Attention, avec les notations de l'énoncé, x, y se réfèrent aux coordonnées dans le repère au sommet et non aux coordonnées dans le repère focal. ■

I.3.2 Tracé

Nous somme maintenant en mesure de tracer une parabole de directrice et foyer donnés, en notant que son équation dans le repère au sommet est également $x = \frac{1}{2p} y^2$. L'astuce est ici de tourner votre feuille de $\frac{\pi}{2}$ (ce qui change les positions usuelles des axes) et tracer une parabole comme en seconde.

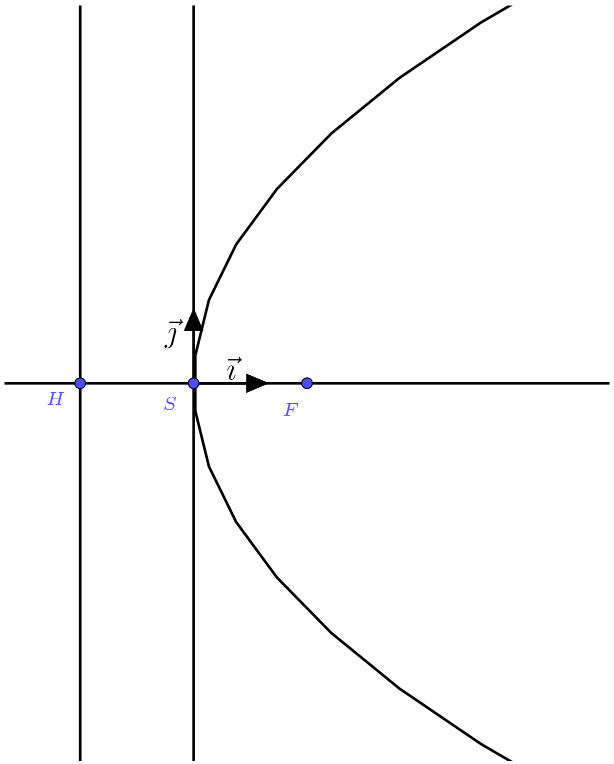


FIGURE 3 – Parabole, dans le repère au sommet

I.3.3 Théorème (Équation réduite d'une ellipse)
Soit $\mathcal{C}$ une ellipse (on a donc $e < 1$). Notons Ω le milieu de ses deux sommets.

L'équation réduite de $\mathcal{C}$ est obtenue dans le repère centré en Ω et dont les vecteurs de bases sont les même que le repère focal (on appelle repère central ce nouveau repère). Cette équation est de la forme

$$\mathcal{C} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

où a, b sont deux réels strictement positifs vérifiant $a > b$.

Preuve.
Commençons par poser M de coordonnée $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans le repère focal et de coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans le repère central. Alors, on a

$$\begin{cases} x = \frac{ep}{1-e^2} + x' \\ y = y' \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x' = x - \frac{ep}{1-e^2} \\ y' = y \end{cases}$$

On a maintenant

$$M \in \mathcal{C} \iff (1-e^2)x^2 + y^2 - 2epx - p^2 = 0 \iff (1-e^2)\left(x^2 - \frac{2ep}{1-e^2}x\right) + y^2 = p^2$$

$$\iff (1-e^2)\left(\left(x - \frac{ep}{1-e^2}\right)^2 - \frac{(ep)^2}{(1-e^2)^2}\right) + y^2 = p^2 \text{ mise sous forme canonique}$$

$$\iff (1-e^2)(x')^2 - \frac{e^2p^2}{1-e^2} + y^2 = p^2 \iff (1-e^2)(x')^2 + y^2 = p^2 + \frac{e^2p^2}{1-e^2}$$

Remarquons maintenant que $1 - e^2 > 0$ car $0 < e < 1$ et il suffit maintenant de diviser l'équation obtenue par $p^2 + \frac{e^2p^2}{1-e^2} = \frac{p^2}{1-e^2} > 0$ pour obtenir une équation sous la forme voulue.

On a alors $a = \frac{p}{1-e^2}$ et $b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} < a$ car $1-e^2 \in]0,1[$ et donc $\sqrt{1-e^2} > 1-e^2$. ■

I.3.4 Tracé

Cette fois nous n'avons pas de méthode directe pour tracer une ellipse. Par contre on peut prouver facilement que les sommets sont de coordonnées $\begin{pmatrix} \pm a \\ 0 \end{pmatrix}$ dans le repère central (ce sont les points d'ordonnée nulle dans le repère central comme dans le repère focal).

I.3.5 Théorème (Équation réduite d'une hyperbole)
Soit $\mathcal{C}$ une hyperbole (on a donc $e > 1$). Notons Ω le milieu de ses deux sommets.

L'équation réduite de $\mathcal{C}$ est également obtenue dans le repère central. Cette équation est de la forme

$$\mathcal{C} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

où a, b sont deux réels strictement positifs.

Preuve.
Elle est tout à fait similaire à la preuve précédente, excepté que cette fois $1-e^2 < 0$.

On trouve $a = \frac{p}{e^2-1}$ et $b = \frac{p}{\sqrt{e^2-1}}$ et les positions relatives de a et b sont données par les positions relatives de e et $\sqrt{2}$. ■

I.3.6 Sommets

Encore une fois, les sommets sont de coordonnées $\begin{pmatrix} \pm a \\ 0 \end{pmatrix}$.

I.3.7 Proposition
Une ellipse et une hyperbole sont des courbes symétriques par rapport à :

1. chacun des axes du repère central
2. leur centre

Preuve.
Dans le repère central, le symétrique d'un point $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ par rapport à Ω est de coordonnées $\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$.

De plus, en revenant à l'équation réduite de C (la conique étudiée ici : une ellipse ou une hyperbole), on constant immédiatement que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in C \iff \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} \in C$$

ce qui prouve que C est bien symétrique par rapport à Ω.

On prouve de même les symétries par rapport aux axes. ■

I.3.8 Conséquence

Le point F', symétrique de F par rapport à Ω est également un foyer de C associé à la directrice $\mathcal{D}'$ (la droite symétrique de $\mathcal{D}$ par rapport à Ω).

Pour ce couple de foyer/directrice, la convention pour le repère focal est de prendre $\vec{\imath} = -\frac{\overrightarrow{HF'}}{\|\overrightarrow{HF'}\|}$.

I.4 Études des courbes implicites

I.4.1 Définition
On dit qu'une courbe C du plan est définie par une équation implicite si elle est donnée par une équation de la forme

$$C : f(x, y) = 0$$

pour une certaine fonction f de classe $\mathcal{C}^1$.

Dans ce cas les points de C sont les points M du plan de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ qui vérifient $f(x, y) = 0$.

I.4.2 Exemple
Les ellipses et hyperboles que nous venons d'étudier sont des courbes définies par une équation implicite.

On ne peut pas isoler x ou y de ces équations, contrairement aux équations réduites de paraboles par exemple, ou aux courbes représentatives de fonctions usuelles.

I.4.3 Théorème
Soit C une courbe du plan définie par une équation implicite $C : f(x, y) = 0$ où la fonction f est $\mathcal{C}^1$.

Soit $M_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ un point de C.

1. On dit que M_0 est un point régulier de C ssi $\overrightarrow{grad}\, f(x_0, y_0) \neq \vec{0}$.
2. Si M_0 est un point régulier de C, alors la tangente à C au point M_0 est la droite passant par M_0 et normale à $\overrightarrow{grad}\, f(x_0, y_0)$.

Preuve.
Admis pour l'instant. Nous verrons une idée de preuve dans le chapitre sur les fonctions de plusieurs variables. ■

I.4.4 Proposition (Tangentes à une ellipse)
On considère une ellipse $E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (les coordonnées sont donc données dans le repère central).

Soit $M_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in E$. Alors la tangente à E en M_0 est la droite d'équation

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

Preuve.
Posons $f : (x, y) \mapsto \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$ de telle sorte que $C : f(x, y) = 0$.

Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ par rapport à chacune de ses deux variables et on trouve $\overrightarrow{grad}\, f(x_0, y_0) = (\frac{2x_0}{a^2}, \frac{2y_0}{b^2})$.

Comme $M_0 \neq (0, 0)$ (car le centre n'est pas sur l'ellipse), M_0 est un point régulier et on connaît un vecteur normal à la tangente cherchée. Notons T_0 cette tangente.

On a maintenant, pour $M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
M \in T_0 &\iff \overrightarrow{M_0M} \perp \overrightarrow{grad}\, f(x_0, y_0) \\
&\iff (x - x_0)\frac{2x_0}{a^2} + (y - y_0)\frac{2y_0}{b^2} = 0 \text{ par calcul du produit scalaire} \\
&\iff \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - (\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}) = 0 \text{ en divisant par 2} \\
&\iff \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1 \text{ car } M_0 \in C
\end{aligned}$$

■

I.4.5 Tangentes particulières

Aux points de coordonnées $\begin{pmatrix} \pm a \\ 0 \end{pmatrix}$ les tangentes sont verticales et aux points de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ \pm b \end{pmatrix}$ elles sont horizontales.

I.4.6 Proposition (Tangentes à une hyperbole)
On considère une hyperbole $H : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Soit $M_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in H$. Alors la tangente à H en M_0 est la droite d'équation

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

Preuve.
Tout à fait similaire. ■

I.4.7 Tangentes aux sommets

Les tangentes aux sommets d'une hyperbole (de coordonnées $\begin{pmatrix} \pm a \\ 0 \end{pmatrix}$) sont verticales également.

I.4.8 Allure provisoire

Placer dans chacun des deux cas les points connus ainsi que les tangentes obtenues (on se place dans le repère central). On pourra prendre $a = 2$ et $b = 1$ dans chaque cas.

On pourrait presque tracer l'ellipse, il nous manque des informations pour l'hyperbole.

II Courbes paramétrées

II.1 Courbes dans $\mathbb{R}^2$

II.1.1 Définition
Une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$ dans $\mathbb{R}^2$ est une fonction $f : \begin{cases} I & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & M(t) \end{cases}$. Le **support** de la courbe est $f(I)$ (l'ensemble des points $M(t)$, ou encore la trajectoire du point M) .

II.1.2 Exemple
Quel est le support de la courbe $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ définie sur $[-\pi, \pi]$? Remarquer que la variable t n'apparaît pas graphiquement.

II.1.3 Remarque

On note souvent $M(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$. Le but n'est pas de tracer la courbe représentative des fonctions x et y mais bien la trajectoire du mobile dont on connaît les coordonnées en fonction du temps.

II.1.4 Définition
Soit f une courbe $\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R}^2)$ et $t_0 \in I$. Si $f'(t_0) \neq \vec{0}$, on dit que le point t_0 est régulier, sinon on dit qu'il est singulier. Si tous les points de f sont régulier, f est dite régulière.

II.1.5 Courbes représentatives

Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^1$ (numérique). On considère la courbe $f : t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ \varphi(t) \end{pmatrix}$.

Le support de f est alors $\{\begin{pmatrix} t \\ \varphi(t) \end{pmatrix} \mid t \in I\}$, c'est à dire la courbe représentative de la fonction φ ! De plus, f est régulière.

Question subsidiaire : que dire de la courbe paramétrée $g : t \mapsto \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ t \end{pmatrix}$?

II.1.6 Proposition (Paramétrisations des coniques)
Considérons l'ellipse $E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ et l'hyperbole $H : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

1. E est le support de la courbe paramétrée $f_E : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix} \end{cases}$.
2. La demi hyperbole $H_+ = H \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x \geqslant 0\}$ est le support de la courbe $f_H : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} a\,\mathrm{ch}\, t \\ b\,\mathrm{sh}\, t \end{pmatrix} \end{cases}$

D'après la proposition I.3.7, l'autre demi-hyperbole s'obtient par symétrie par rapport à (Oy).

Preuve.
Il s'agit de paramétrer ces courbes implicites.

Soit $M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

1. $M \in E$ ssi $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{x}{b}\right)^2 = 1$ ssi il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{x}{a} = \cos t$ et $\frac{y}{b} = \sin t$ ssi M est un point du support de f_E.
2. Montrons d'abord un résultat intermédiaire.
   Soient $\alpha \in \mathbb{R}^+$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha^2 - \beta^2 = 1$. Comme sh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est strictement croissante elle est injective. De plus, $\lim\limits_{-\infty} \mathrm{sh} = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} \mathrm{sh} = +\infty$ et que sh est continue, $\mathrm{sh}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et donc sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   Ainsi on peut poser $t \in \mathbb{R}$ tel que $\beta = \mathrm{sh}(t)$. Alors $\alpha^2 = 1 + \beta^2 = 1 + \mathrm{sh}^2(t) = \mathrm{ch}^2(t)$. Comme $\alpha \geqslant 0$ et $\mathrm{ch}(t) \geqslant 0$, on a $\alpha = \mathrm{ch}(t)$.
   Il suffit maintenant d'appliquer ce résultat pour obtenir un raisonnement similaire au point 1). ∎

II.2 Domaine d'étude

Très souvent, il faudra calculer I. Tout comme pour les fonctions numériques paires, impaires ou périodiques, on peut parfois réduire l'étude à un intervalle plus petit. Ceci correspond à une certaine symétrie du support de la courbe.

II.2.1 Résumé des symétries connues

Notons $M : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et M' un autre point.

Coordonnées de M'	M' est le
$\begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$	symétrique de M par rapport à (Oy)
$\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$	symétrique de M par rapport à (Ox)
$\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$	symétrique de M par rapport à au point O
$\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$	symétrique de M par rapport à $\mathcal{D} : y = x$
$\begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix}$	symétrique de M par rapport à $\mathcal{D} : y = -x$
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$	translaté de M par le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

En règle générale, un schéma représentant les points M et M' permet de retrouver la symétrie.

II.2.2 Réduction du domaine d'étude

Notons $M(t)$ un point de la courbe $f : D \to \mathbb{R}^2$. Le principe de la réduction de domaine d'étude est de calculer les coordonnées de $M(\varphi(t))$ pour une fonction φ bien choisie de telle manière que $M(\varphi(t))$ est l'un des symétrique vu au point précédent. Si c'est le cas, on peut réduire le domaine d'étude puis compléter le tracer par la symétrie trouvée.

Donnons une liste non exhaustive des transformations classiques φ.

Forme de D	Point à calculer	Domaine réduit
Quelconque	$M(t+T)$	sur une période, souvent $D \cap [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$
centré en 0	$M(-t)$	$D \cap [0, +\infty[$
$[0, a]$	$M(a-t)$	$[0, \frac{a}{2}]$
$]0, +\infty[$	$M(\frac{1}{t})$	$]0, 1]$

II.2.3 Exemple

Donnons un domaine d'étude de $f : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix} = M(t)$.

f est définie sur $\mathbb{R}$. Soit $t \in \mathbb{R}$.

— $M(t+2\pi) = M(t)$ (ce n'est même pas une transformation, on retrouve exactement le même point).
Ainsi on peut étudier f sur $[-\pi, \pi]$ pour obtenir le support complet.

— $M(-t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(2t) \end{pmatrix}$ est le symétrique de M par rapport à (Ox). Ainsi on étudie f sur $[0, \pi]$ et on complétera le tracé par symétrie par rapport à (Ox).

— $M(\pi - t) = \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ \sin(2\pi - 2t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ -\sin(2t) \end{pmatrix}$ est le symétrique de M par rapport à O.
On étudie f par sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

— Le calcul de $M(\frac{\pi}{2} - t)$ n'aboutit par à une des formes connues. On arrête la réduction de domaine.

II.2.4 Exemple

1. Pour notre ellipse, on peut étudier f_E sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ en trouvant d'abord une périodicité, puis une symétrie par rapport à (Ox) par parité (ce qui réduit l'intervalle à $[0, \pi]$ et on retrouve la symétrie par rapport à l'axe focal) puis une symétrie par rapport à (Oy) (qui était elle aussi déjà connue).
2. L'étude de l'hyperbole se fera sur $[0, +\infty[$ après une étude de parité et on constante une symétrie par rapport à (Ox) (l'axe focal).

II.3 Tangentes, variations

Maintenant que nous disposons d'un domaine d'étude raisonnable, il nous faut tracer l'allure du support. Pour cela nous allons déterminer si la courbe se "dirige" vers la gauche ou la droite (x est décroissante ou croissante), vers le haut ou le bas (variations de y).

II.3.1 Etude des variations

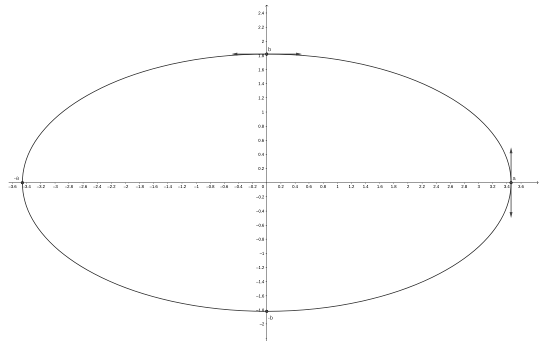
Il s'agit là simplement de donner un tableau de variations complet pour x et y, tout en notant les points d'annulation des dérivées (on repère ainsi les éventuels points singuliers).

II.3.2 Exemple

Dressons les tableaux pour f_E paramétrant notre ellipse. Aucune étude n'est nécessaire car les fonctions sont des fonctions usuelles.

t	0		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	0	$-$	
$x(t)$	a	$\searrow$	0
$y(t)$	0	$\nearrow$	b
$y'(t)$		$+$	0

Nous sommes maintenant en mesure de tracer l'ellipse.



II.3.3 Cordes

La corde passant par les points (distincts) $M(t)$ et $M(a)$ est dirigée par le vecteur unitaire $\frac{\overrightarrow{M(a)M(t)}}{\|\overrightarrow{M(a)M(t)}\|}$

II.3.4 Définition
Soit $f : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée et $t_0 \in I$. On dit que f possède une demi tangente à gauche (resp. à droite) en t_0 ssi $\lim\limits_{t \to t_0^-} \frac{f(t)-f(t_0)}{\|f(t)-f(t_0)\|}$ existe (resp. limite à droite). Notons $\vec{u}_-$ et $\vec{u}_+$ ces limites quand elles existent.

La demi-tangente à gauche de f en t_0 est alors $f(t_0) + \mathrm{Vect}(\vec{u}_-)$ et la demi-tangente à droite est $f(t_0) + \mathrm{Vect}(\vec{u}_+)$, c'est à dire les droites passant par le point $f(t_0)$ est dirigées par les vecteurs $\vec{u}_-$ et $\vec{u}_+$. Si ces droites sont confondues ($\vec{u}_-$ et $\vec{u}_+$ sont colinéaires) alors la tangente à f en t_0 est définie comme étant cette même droite.

II.3.5 Théorème
Si t_0 est un point régulier de la courbe f alors f possède une tangente en t_0 dirigée par $f'(t_0)$.

Preuve.
D'après le théorème de Taylor-Young, et par continuité de la norme, $\|f(t)-f(t_0)\| \underset{t_0}{\sim} |t-t_0|\|f'(t_0)\| \neq 0$. Ainsi $\frac{f(t)-f(t_0)}{\|f(t)-f(t_0)\|} \underset{t_0}{\sim} \frac{1}{\|f'(t_0)\|}\frac{f(t)-f(t_0)}{|t-t_0|} \underset{t_0}{\to} \pm\frac{f'(t_0)}{\|f'(t_0)\|}$. ∎

II.3.6 Exemple
Reprenons $f : t \mapsto \begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(2t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}$.

f est clairement dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ car ses deux fonctions coordonnées le sont. De plus, pour $t \in [0, \frac{pi}{2}]$, on a

$$x'(t) = -\sin(t) \text{ et } y'(t) = 2\cos(2t)$$

On en déduit le tableau de variations.

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	0		$-$		
$x(t)$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	0
$y(t)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0
$y'(t)$		$+$	0	$-$	

On remarque qu'en $t = 0$, la tangente est dirigée par $f'(0) = \begin{pmatrix}0\\ 2\end{pmatrix}$: elle est verticale.

De plus, en $t = \frac{\pi}{4}$ la tangente est dirigée par $f'(\frac{\pi}{4}) = \begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0\end{pmatrix}$: elle est horizontale.

Finalement, en $t = \frac{\pi}{2}$, la tangente est dirigée par $f'(\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix}-1\\ -2\end{pmatrix}$.

II.4 Tracé

II.4.1 Méthode

1. Placer tous les points étudiés dans la phase précédente. Attention, on ne voit pas a priori les valeurs de t sur le tracé mais seulement des les points $M(t)$ dont on connaît les coordonnées.
2. Placer les tangentes : vu qu'on connaît déjà un point, un vecteur directeur suffit.
3. Tracer la courbe passant par ces points, tangente à ses tangentes. Le tracé doit respecter les variations.
4. Effectuer les symétries dans l'ordre inverse de leur découverte.

II.4.2 Exemple

Toujours pour la courbe $f : t \mapsto \begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(2t)\end{pmatrix}$. On commence par tracer sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$.

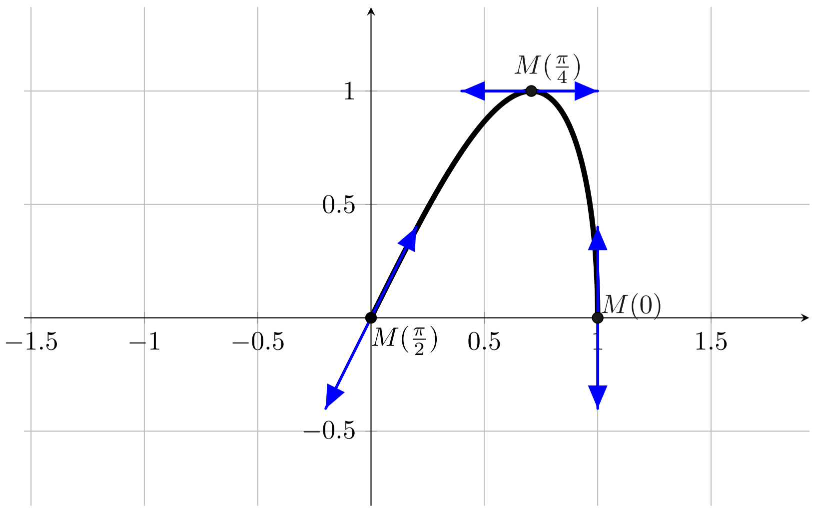
On place ensuite les symétrique des 3 points et 3 tangentes par rapport à O pour obtenir le tracé sur $[0, \pi]$ (partie noire + rouge sur la figure). Ensuite on place les symétriques par rapport à (Ox) des 5 points et 5 tangentes pour obtenir le tracé final sur $[-\pi, \pi]$.

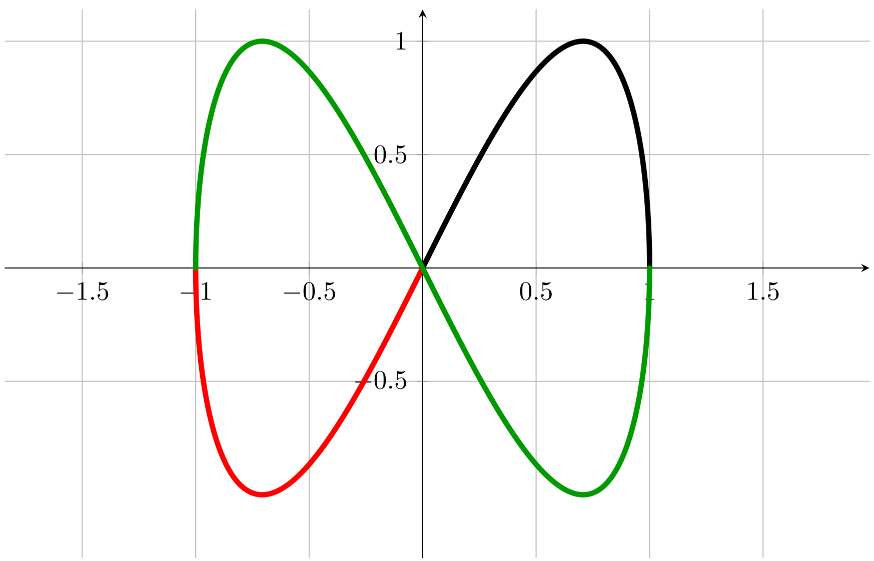
II.5 Étude en un point

Le cadre ici est d'étudier plus particulièrement l'allure de la courbe au voisinage du point $M(t_0)$ où t_0 est fixé. En particulier, on pourra trouver la tangente dans les cas des points singuliers.

II.5.1 Continuer à dériver

Le raisonnement du théorème II.3.5 s'étend sans difficulté cas le cas où $f'(t_0) = 0$ mais $f^{(p)}(t_0) \neq 0$ pour un $p > 1$ (que l'on prend le plus petit possible). Allons plus loin et trouvons de plus $q > p$ le plus petit entier tel que $\vec{u}_p = f^{(p)}(t_0), \vec{u}_q = f^{(q)}(t_0)$ est libre.





Alors dans le repère $\mathcal{R}' = (M(t_0), \vec{u}_p, \vec{u}_q)$, les coordonnées de $M(t)$ (notées $\alpha(t)$ et $\beta(t)$) vérifient

$$\begin{cases} \alpha(t) = \frac{(t-t_0)^p}{p!} + o_{t_0}((t-t_0)^p) \\ \beta(t) = \frac{(t-t_0)^q}{q!} + o_{t_0}((t-t_0)^q) \end{cases}$$

c'est à dire que la courbe “suit” les directions d'abord de sa tangente (de direction $\vec{u}_p$) puis de $\vec{u}_q$.

Plus précisément, dans $\mathcal{R}'$ on a plus sieurs cas :

- Si p est pair, alors α ne change pas de signe et donc on reste toujours du même côté de l'axe dirigé par $\vec{u}_q$.
- Si q est pair, alors β ne change pas de signe et donc la courbe reste toujours du même côté de sa tangente (qui est l'axe dirigé par $\vec{u}_p$).
- on adapte les raisonnements dans les cas impairs pour trouver les 4 cas du points suivant.

II.5.2 Cas général

Suivant la parité de$p$ et q on obtient les 4 cas de la figure 4. p impair correspond à la

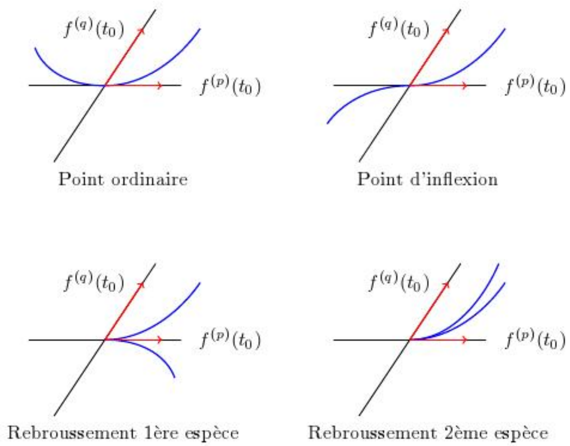


FIGURE 4 – Étude locale

première ligne, p paire à la seconde.

q pair correspond aux cas 1 et 4 (sur la diagonale).

II.5.3 Méthode

Pour étudier l'allure d'une courbe au voisinage d'un point de paramètre t_0 (par exemple un point singulier).

1. Trouver le pus petit entier p tel que $f^{(p)}(t_0) \neq \vec{0}$. C'est un vecteur directeur de la tangente.
2. Trouver le plus petit entier $q > p$ tel que $f^{(q)}(t_0)$ n'est pas colinéaire à $f^{(p)}(t_0)$ (on peut utiliser un déterminant) pour conclure sur l'allure.

II.5.4 Cas p=1, q=2

La vitesse et l'accélération ne sont pas colinéaires. C'est le cas le plus classique. Le point est dit **birégulier**. Dans ce cas la vitesse donne la direction de la tangente et l'accélération le sens de "courbure".

II.5.5 En pratique

On peut tout à fait utiliser un développement limité de x et y pour obtenir des vecteurs proportionnels aux dérivées successives.

II.5.6 Exemple

Etudier la tangente au point de paramètre 0 de $t \mapsto \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(t) \\ t^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.

x et y sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$. Deux méthodes pour étudier l'allure de la courbe en $t = 0$.

1. On a $x'(0) = y'(0) = 0$ et donc il s'agit d'un point singulier. De plus $x''(0) = 1$ et $y''(0) = 0$. Ainsi $f''(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dirige la tangente au point de paramètre 0. On a ici p = 2.
   Pour finir, $x^{(3)}(0) = 0$ et $y^{(3)}(0) = 6$ et donc $f^{(3)}(0)$ n'est pas colinéaire à $f''(0)$. C'est à dire que q = 3. On a donc ici un point de rebroussement de première espèce.
2. Donnons des développements limités des fonctions x et y.

$$\begin{array}{llll} x(t) = & 1 + 0t & + \frac{1}{2}t^2 + 0t^3 & + o_0(t^3) \\ y(t) = & 0 + 0t & + 0t^2 + 1t^3 & + o_0(t^3) \end{array}$$

   Ainsi, comme f est de classe $\mathcal{C}^3$ au moins, on a $f'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (la colonne en facteur de t), $\frac{1}{2!}f''(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ (la colonne en facteur de t^2) et $\frac{1}{3!} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (facteur de t^3) et on conclut comme dans la méthode précédente.

Exercice 1
Trouver en fonction de $k \in \mathbb{R}$ les éventuels points singuliers de $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) + 2k\cos(\frac{t}{2}) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$

II.6 Branches infinies

II.6.1 Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée et $a \in \bar{I}$. On dit que f possède une branche infinie au voisinage de a si $\lim\limits_{t\to a} x(t)$ et $\lim\limits_{t\to a} y(t)$ existent et qu'on est dans l'un des cas suivant

1. Une des limite est infinie et l'autre finie : on obtient une asymptote qui est horizontale (lorsque seulement y tend vers l'infini) ou verticale (lorsque seulement x tend vers l'infini).
2. Ces deux limites sont infinies.
   (a) Si $\lim\limits_{t\to a} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$ alors on dit que f possède une branche parabolique de direction (Ox).
   (b) Si $\lim\limits_{t\to a} \frac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty$ alors on dit que f possède une branche parabolique de direction (Oy).
   (c) Si $\lim\limits_{t\to a} \frac{y(t)}{x(t)} = \alpha \in \mathbb{R}^*$ est un réel **non nul**, il y a deux cas
      i. si $\lim\limits_{t\to a} y(t) - \alpha x(t) = \beta \in \mathbb{R}$ alors on dit que la droite $\mathcal{D} : y = \alpha x + \beta$ est asymptote à f.
      ii. sinon on dit que f admet une branche parabolique de pente α.

II.6.2 Illustration

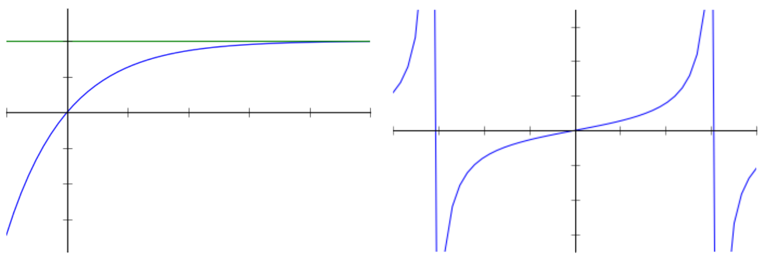


FIGURE 5 – Asymptotes

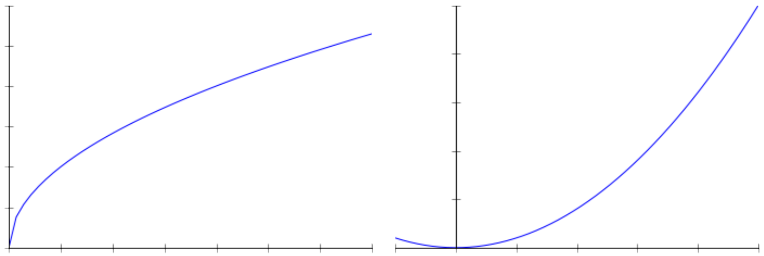


Figure 6 – Branches paraboliques

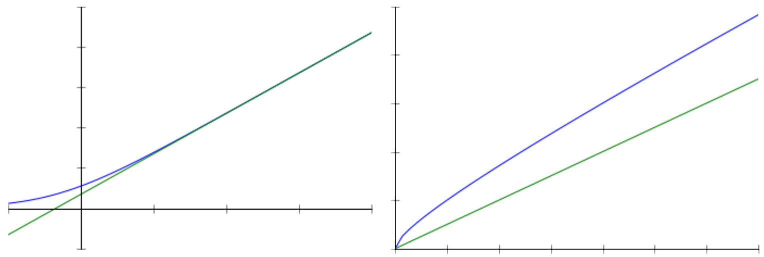


Figure 7 – Asymptote et branche parabolique obliques

II.6.3 Application à l'hyperbole

Les variations ne présentent pas de difficultés particulières.

t	0	$+\infty$
$x'(t)$	0	$+$
$x(t)$	a $\nearrow$	$+\infty$
$y(t)$	0 $\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$		$+$

On remarque, comme prévue un tangente verticale en $t = 0$ (dirigée par $\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha > 0 \end{pmatrix}$).

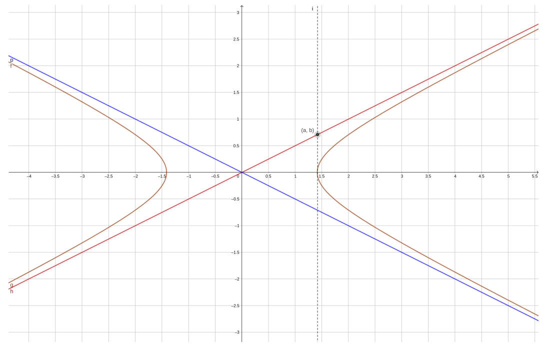
Étudions la branche infinie en $+\infty$.

— On a deux limites infinies. ce qui élimine les asymptotes verticale et horizontale

— $\frac{y(t)}{x(t)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{be^t}{ae^t} = \frac{b}{a} \in \mathbb{R}^*$. on est dans le cas 2c

— Pour $t \geqslant 0$, $y(t) - \frac{b}{a}x(t) = \cdots = -2be^{-t} \underset{+\infty}{\rightarrow} 0$.

On en déduit que l'hyperbole admet la droite d'équation $y = \frac{b}{a}x$ comme asymptote oblique.



Plan d'une étude

On pose $f : I \to \mathbb{R}^2$ et on note x et y ses fonctions coordonnées.

1. Souvent, l'intervalle de définition de f ne sera pas donné. il faut alors commencer l'étude par déterminer le domaine de définition de la courbe.
2. Définir ensuite un domaine d'étude le plus restreint possible en utilisant les symétries des expressions pour x et y.
3. Déterminer les variations et les limites de x et y, et on résume ces informations dans un tableau de variations.
4. Exhiber les tangentes "intéressantes" ainsi que les points singuliers s'il y en a.
5. Etudier les branches infinies éventuelles.
6. Tracer la courbe en utilisant toutes les informations précédemment glanées.
7. Repérer s'il y a des points **multiples** (par lesquels la courbe passe plusieurs fois) et les déterminer en trouvant t_1, t_2 tels que $\begin{cases} x(t_1) = x(t_2) \\ y(t_1) = y(t_2) \end{cases}$.

Index