Devoir maison 4

A rendre le au plus tard le 11/10/2022.

Exercice 1

On considère l'ellipse $\mathcal{C} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ où $a > b > 0$. Notons e son excentricité, F son foyer, $\mathcal{D}$ sa directrice et $p = e \times h = e \times d(F, \mathcal{D})$.

1. Rappeler dans quel repère cette équation est valable, ainsi que les coordonnées des sommets et l'équation de l'axe focal dans ce repère.
2. On pose $-c$ l'abscisse de F, ainsi $F : \begin{pmatrix} -c \\ 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Donner, grâce au cours, l'expression de a, b, c en fonction de e et p (l'excentricité et le paramètre de $\mathcal{C}$).
   (b) Montrer que $e = \frac{c}{a}$ et $a^2 = b^2 + c^2$.
   (c) Montrer que $d(\Omega, \mathcal{D}) = \frac{a}{e}$.
   (d) Placer sur un schéma : le repère central, les sommets, les points de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ \pm b \end{pmatrix}$ (qui sont également des points de l'ellipse) ainsi que le foyer F et son symétrique F' par rapport à Ω (qui est de coordonnées $\begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$). On pourra prendre $a = 4$ et $b = 2$ pour le schéma.
   On attend ici une justification de la position de F et F' par rapport aux autres points et une construction au compas.
   (e) En utilisant le théorème de Thalès, construire un segment de longueur $e = \frac{c}{a}$ puis un segment de longueur $d(\Omega, \mathcal{D}) = \frac{a}{e}$. On utilisera seulement le compas pour reporter les distances. Vous pouvez utiliser une équerre pour tracer des parallèles.
   (f) Placer la directrice $\mathcal{D}$ ainsi que $\mathcal{D}'$ (son symétrique par rapport à Ω) sur le schéma précédent.
3. Rappelons que par définition $M \in \mathcal{C} \iff MF = e \times d(M, \mathcal{D})$. Montrer sans calcul que $M \in F \iff MF' = e \times d(M, \mathcal{D}')$.
4. (a) Montrer que si $M \in \mathcal{C}$ alors $MF + MF' = 2a$.
   (b) Nous pouvons maintenant terminer le tracé de l'ellipse, moyennant un peu de travaux manuels et en utilisant une méthode appelée méthode du jardinier.
   Munissez vous d'une ficelle de longueur 2a (en pratique il faut la prendre un peu plus longue) et de deux punaises. Attacher chaque extrémité de la ficelle sur chaque foyer placé précédemment (d'où l'excès de longueur, pour pouvoir attacher la ficelle : le morceau entre les deux punaises doit être de longueur 2a).
   Il s'agit maintenant de tendre la ficelle à l'aide d'un crayon : la pointe du crayon est en un point M vérifiant $MF + MF' = 2a$. Faire tourner la crayon en maintenant la ficelle tendue pour tracer l'ellipse.
5. Question bonus : étude de la réciproque et justification de la méthode du jardinier.
   Soient F, F' deux points distincts du plan et $a > 0$ tel que $2a > FF'$. On note
   $$E = \{M;\ MF + MF' = 2a\}$$
   On souhaite montrer que E est une ellipse de demi grand-axe a et de foyers F et F'. En notant $\mathcal{C}$ cette ellipse, on a déjà montré que $\mathcal{C} \subset E$.
   (a) Construire le repère le mieux adapté à notre étude en fonction de F et F'. On note Ω son centre.
   (b) Comment poser c et e en fonctions des notations de cette question uniquement (la question 5) ?
   (c) Soit $M : \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ (dans le repère précédemment posé) un point de E. Évaluer MF^2 et MF'^2 en fonction de x_0, y_0 et c.
   Exprimer ensuite $MF - MF'$ en fonction de e et x_0 puis MF en fonction de a, e et x_0.
   (d) En utilisant la question 2, poser une droite $\mathcal{D}$ d'équation à préciser et montrer que $MF^2 = e^2 \times d(M, \mathcal{D})^2$.
   (e) Montrer qu'on a bien $E = \mathcal{C}$.

Indications :

1.
2. (a) On a ici $1-e^2>0$ et on trouve a, b directement d'après le cours. On doit trouver $c=\frac{ep}{1-e^2}$.
   (b)
   (c)
   (d) La relation de la question 2b nous fait penser à un théorème de notre enfance, et ce n'est pas celui de la question suivante.
   (e) On veut un segment a fois plus petit qu'un segment de longueur c. Remarquer que 1 est a fois plus petit que a...
3. Introduire un point M' bien choisi.
4. (a) On pourra remarquer qu'un point de l'ellipse est forcément entre les deux directrices.
   (b) Pas si facile. Ils sont forts ces jardiniers.
5. (a) Le nom du centre est un bon indice. Voir éventuellement le cours pour des astuces sur les constructions des vecteurs de base. Attention au sens de vos vecteurs pour être cohérent avec le schéma précédent.
   (b) Il faut adapter les résultats de la question 2.
   (c) Pour conclure, on peut remarquer que $MF-MF'+(MF+MF')=2MF$.
   (d) Attention à l'orientation et au signe de nos quantité pour poser l'équation. Ensuite il s'agit de calcul de distances.
   (e)