Exercice 1
Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$; on pose pour tout $n \geqslant 1$, $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$. Soit $l \in \mathbb{R}$.

1. *On suppose que $u_n \to 0$. Montrer que $v_n \to 0$ en revenant à la définition.*
2. *On suppose maintenant que $u_n \to l$. Montrer que $v_n \to l$.*
3. *On suppose que $u_{n+1} - u_n \to l$. Montrer que $\frac{u_n}{n} \to l$.*
4. *On suppose que que la suite (u_n) est strictement positive et que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to l$. Montrer que $\sqrt[n]{u_n} \to l$.*
5. *Etudier la limite de $\sqrt[n]{\binom{2n}{n}}$.*

Exercice 2
Donner les limites éventuelles des suites suivantes (dont on donne le terme général) :

1. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$.
2. *Pour* $a \in \mathbb{R}_+^*$, $u_n = \sqrt[n]{a}$
3. $u_n = \sqrt[n]{n^2}$.
4. $u_n = \frac{\ln(n^4+1)}{n+1}$.
5. $u_n = \frac{2n^3+3n+4}{n!}$.
6. $u_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} k!$ *(tend vers 1)*
7. $u_n = \frac{E(\sqrt{n})}{n}$.
8. $u_n = \frac{n-(-1)^n}{n+(-1)^n}$

Exercice 3
1. *Trouver deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :*
   (a) $\frac{u_n}{v_n} \underset{1}{\to}$ *mais $(u_n - v_n)$ ne tend pas vers 0.*
   (b) $u_n - v_n \underset{0}{\to}$ *mais $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ ne tend pas vers 1.*
2. *Trouver deux suites $(u_n), (v_n)$ telles que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ mais $e^{u_n} \underset{+\infty}{\sim} e^{v_n}$ est faux.*
3. *Trouver deux suites $(u_n), (v_n)$ de limite 1 telles que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ mais $\ln(u_n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(v_n)$ est faux.*

Exercice 4
On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ pour tout $n > 0$.

1. *Etudier la monotonie de $(S_n)_n$.*
2. *Montrer que pour tout entier $m \geqslant 2$ on a $\frac{1}{m^2} \leqslant \frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}$.*
3. *Prouver la convergence de $(S_n)_n$.*

Exercice 5
Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$

1. *Soit n un entier naturel non nul. Montrer que l'équation $x^n = a(1-x)$ admet une unique solution dans $]0,1[$. On note u_n cette solution*
2. *Etudier la monotonie de $(u_n)_{n>0}$. On se servira du tableau de variations précédemment trouvé.*
3. *Montrer la convergence et calculer la limite de $(u_n)_{n>0}$.*

Exercice 6
On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$ pour tout $n > 0$. On souhaite montrer que $(S_n)_n$ converge.

1. *Montrer que les suites $(S_{2n})_n$ et $(S_{2n+1})_n$ sont adjacentes.*
2. *Conclure.*

Exercice 7
On pose pour tout n entier non nul $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$ et $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$

1. *Montrer que $\ln(x+1) \leqslant x$ pour tout $x > -1$.*
2. *Montrer que ces deux suites sont adjacentes. Que peut-on en déduire pour $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$? Donner le résultat sous forme de développement à deux termes (et un $o_{+\infty}$).*
3. *(**[1]) En utilisant ce résultat, calculer la limite de la suite de l'exercice précédent.*

Exercice 8
Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{a}{u_n})$ avec $a > 1$ fixé. On pose pour tout n $v_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}$

1. question difficile

1. *Calculer* v_{n+1} *en fonction de* v_n.
2. *En déduire une expression de* v_n *en fonction de* n *puis un expression de* u_n *en fonction de* n.
3. *Conclure quant à la limite de* (u_n).
4. *Donner un équivalent de* $u_n - \sqrt{a}$.

Exercice 9

On définit la suite (u_n) *par* $u_0 \in]0,1[$ *et* $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0,1[$.
2. *Etudier la monotonie de* (u_n).
3. *Montrer que* (u_n) *converge et ensuite calculer sa limite.*