Coniques

Exercice 1
Soient $a, b \in]0, +\infty[$ avec $a < b$. Soit $t \in \mathbb{R}\backslash\{a, b\}$. On considère la courbe d'équation (implicite)

$$\mathcal{C}_t : \frac{x^2}{a^2 - t} + \frac{x^2}{b^2 - t} = 1$$

Donner en fonction de t une description de $\mathcal{C}_t$.

Exercice 2
On considère une parabole $\mathcal{P}$ de foyer F et directrice $\mathcal{D}$. On se place dans le repère où l'équation est réduite.

1. Rappeler la valeur de l'excentricité et l'interprétation géométrique du paramètre p de $\mathcal{P}$.
2. Rappeler l'équation réduite de $\mathcal{P}$ ainsi que le repère associé.
3. Soit M un point d'ordonnée $t \in \mathbb{R}$ de $\mathcal{P}$. Donner une équation de la tangente à $\mathcal{P}$ en M.
4. On pose H le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$. Montrer que la médiatrice de $[FH]$ est également la tangente à $\mathcal{P}$ en M.
5. On considère le vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{t}{p} \end{pmatrix}$. Montrer que ce vecteur est normal à $\mathcal{P}$ en M (c'est à dire normal à la tangente en ce point).
6. On note $\vec{\imath}$ le premier vecteur de base de notre repère. Montrer que $(\widehat{\vec{\imath}, \vec{n}}) = (\widehat{\vec{n}, \overrightarrow{MF}})$

Exercice 3
Soit $\mathcal{P}$ une parabole de paramètre $p > 0$.

1. Soit $M_0 \in \mathcal{P}$. Sous quelle forme peuvent s'écrire les coordonnées de M_0 ?
2. Soit $\alpha > p$. On considère le point $A : \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe un unique cercle centré en A et de rayon noté $R(\alpha)$ tel qui soit tangent à $\mathcal{P}$ en exactement deux points. On exprimera $R(\alpha)$ en fonction de α et p.
   On entend par là que les tangentes aux points de contacts de $\mathcal{P}$ et de ce cercle sont confondues.
   Indication : chercher des conditions sur les points de contacts M_0.
3. Question bonus : chercher $\beta > \alpha$ tel que le cercle de centre $B : \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \end{pmatrix}$ et de rayon $R(\beta)$ soit tangent au premier cercle et montrer que $R(\beta) = R(\alpha) + 2p$.

Vérification des méthodes

Exercice 4
Donner le domaine d'étude ainsi que les symétries à effectuer pour étudier :

1. $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(3t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}$
2. $t \mapsto \begin{pmatrix} \tan t \\ \cos t \end{pmatrix}$
3. $t \mapsto \begin{pmatrix} t^2 + t^4 \\ t + \frac{1}{t} \end{pmatrix}$
4. $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) + \sin(t) \\ \cos(t) - \sin(t) \end{pmatrix}$

Exercice 5
Donner une équation de la tangente au point de paramètre t_0 pour toutes les valeurs de t_0 possible dans chaque cas :

1. $t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ e^{-t^2} \end{pmatrix}$
2. $t \mapsto \begin{pmatrix} t + \frac{1}{t} \\ t\ln(t) - t \end{pmatrix}$

Exercice 6
Etudier les points d'inflexions et les éventuelles branches infinies de $f : t \mapsto \begin{pmatrix} e^t \\ t^2 \end{pmatrix}$.

Exercice 7
Étudier les branches infinies de $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (\frac{1}{t}, \frac{1}{e^t - 1}) \end{array} \right.$.

Etude de courbes

Exercice 8
Etudier et tracer la courbe paramétrée par $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} \frac{t^3}{1+t^2} \\ \frac{t}{1+t^4} \end{pmatrix} \end{array} \right.$

Exercice 9
Etudier et tracer la courbe $\begin{cases} x(t) = t - \sin(t) \\ y(t) = 1 - \cos(t) \end{cases}$. Pour réduire l'intervalle, on observera que $M(t + 2\pi)$ est l'image de $M(t)$ par une certaine translation à préciser.

Exercice 10
Etudier et tracer la courbe $t \mapsto \begin{pmatrix} 2\cos(t) - \cos(2t) \\ 2\sin(t) - \sin(2t) \end{pmatrix}$.

Exercice 11
On pose $\mathrm{th} = \frac{\mathrm{sh}}{\mathrm{ch}}$. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

On considère la courbe (Γ) définie par $\begin{cases} x : t \mapsto t - \mathrm{th}\, t \\ y : t \mapsto \frac{1}{\mathrm{ch}\, t} \end{cases}$

1. Etudier (Γ)
2. (Révisions de 1ère année)
   (a) Calculer $\operatorname{ch} t_0$ et $\operatorname{th} t_0$ pour t_0 tel que $\operatorname{sh} t_0 = 1$. Calculer ensuite t_0 sous la forme d'un logarithme.
   (b) Déterminer le point A de (Γ) où la tangente est de coefficient directeur -1. Déterminer une équation cartésienne de cette tangente et la tracer sur la courbe.
3. Donner l'équation de la tangente au point M de paramètre t. On note T_t cette tangente.
4. Montrer que l'intersection de T_t et de l'axe des abscisses est toujours un point.
5. On note N le point d'intersection de T_t et (Ox). Calculer la distance MN.

Paramétrage

Exercice 12

1. Paramétrer l'ensemble d'équation $x^3 + y^3 = 3xy$ en posant $t = \frac{y}{x}$.
2. Interpréter géométriquement le paramètre t puis le point $M(t)$.
3. Tracer