Devoir maison 6

A rendre le au plus tard le 08/11/2022.

Exercice 1

Posons $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.

1. On note $G = \{AB - BA|\ (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2\} = \{C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})|\ \exists(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2\ C = AB - BA\}$ et $F = \mathrm{Vect}(G)$.
   (a) Donner un exemple explicite d'une matrice non nulle de G dans le cas $n = 2$.
   (b) Montrer que $G \subset \ker(\mathrm{tr})$ puis $F \subset \ker(\mathrm{tr})$.
   (c) On note $E_{i,j}$ les matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Calculer $E_{i,j}E_{k,l}$ pour $i, j, k, l \in [\![1, n]\!]$.
   (d) Soient $i, j \in [\![1, n]\!]$ des entiers distincts. Montrer que $E_{i,i} - E_{j,j} \in G$ et $E_{1,i} \in G$ (dans le cas $i \neq 1$ pour la deuxième).
   (e) Qu'en déduire pour la dimension de F ? On traitera d'abord les cas $n = 2$ et $n = 3$.
   (f) Déterminer $\dim(\ker(\mathrm{tr}))$ et en déduire que $F = \ker(\mathrm{tr})$.
   (g) Est-ce que $I_n \in F$?
2. On note $E = \{f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})|\ \forall(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2\ f(AB) = f(BA)\}$. Les éléments de E sont ainsi des formes linéaires.
   (a) Rappeler la dimension de $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$.
   (b) Montrer que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Donner en plus un élément non nul de E.
   (c) Soit $f \in E$. Montrer que $\ker(\mathrm{tr}) \subset \ker(f)$.
   (d) En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f = \lambda\,\mathrm{tr}$.
   (e) Déterminer une base et la dimension de E.

Cet exercice démontre un résultat intéressant : la propriété qui permet de montrer que deux matrices semblables ont la même trace (aller re-jeter un oeil à ce cours par la même occasion) est en fait caractéristique de la trace parmi les formes linéaires (à une constante multiplicative près, seule la trace possède cette propriété).

Exercice 2 (Révisions sur les séries)

On définit deux suites par : $\begin{cases} \forall n \geqslant 1\ H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\ \forall n \geqslant 2\ a_n = \frac{1}{n} H_{n-1} \end{cases}$.

1. Rappeler la limite de (H_n).
2. Étudier la nature de $\sum a_n$.
3. Étudier la nature de $\sum (-1)^n a_n$.
4. Montrer que $\forall x \in]-1, 1[\ \sum a_n x^n$ converge.
5. Montrer que $\forall x \in]-1, 1[\ \sum H_n x^n$ converge. On note $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} H_n x^n$ pour $x \in]-1, 1[$.
6. Pour $x \in]-1, 1[$, exprimer $(1 - x)S(x)$ sous la forme $\sum b_n x^n$ (où b_n est un coefficient, à trouver) et intuiter la valeur de $S(x)$.

Indications :

Exercice 1

1. Les éléments de F sont des combinaisons linéaires d'éléments de G.
   (a) Il s'agit de trouver un exemple de matrice M de G, c'est à dire des matrices A, B telles que $M = AB - BA \neq 0$.
   (b) La deuxième inclusion est une conséquence directe de la première.
   Pour la première, nous avons une méthode très générale pour montrer une inclusions : Soit $C \in G$. Montrons que $C \in \ker(\mathrm{tr})$....
   (c)
   (d) Il faut trouver à chaque fois des matrices A et B convenables.
   (e) On doit trouver une inégalité pour la dimension, à chaque fois.
   (f) On veut la dimension d'un noyau. Deux méthodes : expliciter ce noyau en résolvant une équation homogène ou utiliser un théorème...
   (g)
2. (a)
   (b) Montrer que c'est un sous-espace de $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$.
   (c) Encore une inclusion
   (d) Attention à utiliser correctement le résultat du cours.
   (e) On vient de décrire tous les éléments de E....

Exercice 2

1. C'est une série connue.
2. On trouve une série divergente.
3. La forme de la série donne le théorème à utiliser.
4. Attention à l'hypothèse à vérifier pour appliquer d'Alembert.
5.
6. On pourra développer et faire un changement d'indice. Pour intuiter la valeur de $S(x)$ on pourra reconnaître les sommes partielles de la série précédente comme partie polynomiale d'un DL connu.