I Anneau des polynômes à une indéterminée

I.1 Définitions

Définition 1

1. *On appelle polynôme à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{K}$ toute suite stationnaire en 0 d'éléments de $\mathbb{K}$: $(a_0, \dots, a_n, 0, 0, \dots)$.*

   En pratique, une telle famille est notée sous la forme $a_0+a_1X+a_2X^2+\cdots+a_nX^n = \sum_{k=0}^n a_kX^k = P = P(X)$. X n'est pas une quantité réelle ou complexe inconnue, c'est un objet formel que l'on appelle l'indéterminé.

   L'ensemble des polynômes à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}[X]$.

2. *On appelle polynôme constant les polynômes de la forme a_0X^0, $a_0 \in \mathbb{K}$, c'est à dire les polynômes n'ayant que le premier coefficient éventuellement non nul. Plus particulièrement on note 0 le polynôme ayant tous ses coefficients nuls.*

3. *On appelle monôme un polynôme n'ayant qu'un coefficient non nul, c'est à dire de la forme a_kX^k.*

Définition 2

Avec les notations de **??**

1. *Si $P \neq 0$, on appelle degré de P et on note $\deg P$ le plus grand entier k pour lequel $a_k \neq 0$.*
2. *Par convention on pose $\deg 0 = -\infty$.*
3. *Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré inférieur (ou égal) à n.*
4. *Le coefficient de degré $\deg P$ est appelé coefficient du terme de plus haut degré ou coefficient dominant de P. Si ce coefficient est 1, le polynôme P est dit unitaire.*

Théorème 1 (Identification des coefficients)

Deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ sont égaux ssi leurs coefficients sont égaux, ie. $\sum a_kX_k$ et $\sum b_kX^k$ sont égaux ssi $\forall k \in \mathbb{N} a_k = b_k$.

Définition 3

1. *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $P = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} a_kX^k$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On appelle valeur de P en λ et on note $P(\lambda)$ l'élément de $\mathbb{K}$ défini par $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} a_k\lambda^k$.*
2. *On définit une application $f_P : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & P(x) \end{array} \right.$. C'est la fonction polynomiale associée à P. On pourrait également la noter $\widetilde{P}$.*

I.2 Opérations sur les polynômes

Définition-Proposition 1

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $P = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_kX_k$ et $Q = \sum_{k\in\mathbb{N}} b_kX^k$.

1. *On appelle somme de P et Q (noté $P + Q$) le polynôme $\sum (a_k + b_k)X^k$.*
2. *On appelle produit de P et Q (noté PQ) le polynôme $\sum c_kX^k$ où $c_k = \sum_{i=0}^k a_ib_{k-i} = \sum\limits_{i+j=k} a_ib_j$.*
3. *En particulier si $\lambda \in K$, $\lambda P = \sum \lambda a_kX^k$.*

Définition 4

Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $P(X) = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_kX^k$. On appelle composé de Q par P et on note $P \circ Q$ ou $P(Q)$ le polynôme $P \circ Q(X) = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_kQ^k(X)$..

On a bien sûr posé $Q^0 = 1$.

Proposition 1

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$.

$$f_{P\pm Q} = f_P \pm f_Q,\ f_{PQ} = f_P \times f_Q,\ f_{P\circ Q} = f_P \circ f_Q$$

I.3 Degrés

Théorème 2

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$. *On remarque que cette formule est vraie même pour le polynôme nul.*
2. $\deg \lambda P = -\infty$ *si* $\lambda = 0$ *et* $\deg \lambda P = \deg P$ *sinon.*
3. $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$ *si Q n'est pas le polynôme nul.*

Théorème 3

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. $\deg(P + Q) \leqslant \max(\deg P, \deg Q)$ avec égalité si ces degrés sont distincts ou si les coefficients dominants sont non-opposés.