Coniques

Exercice 1
Soient $a, b \in]0, +\infty[$ avec $a < b$. Soit $t \in \mathbb{R}\backslash\{a, b\}$. On considère la courbe d'équation (implicite)

$$\mathcal{C}_t : \frac{x^2}{a^2 - t} + \frac{x^2}{b^2 - t} = 1$$

Donner en fonction de t une description de $\mathcal{C}_t$.

Exercice 2
On considère une parabole $\mathcal{P}$ de foyer F et directrice $\mathcal{D}$. On se place dans le repère où l'équation est réduite.

1. Rappeler la valeur de l'excentricité et l'interprétation géométrique du paramètre p de $\mathcal{P}$.
2. Rappeler l'équation réduite de $\mathcal{P}$ ainsi que le repère associé.
3. Soit M un point d'ordonnée $t \in \mathbb{R}$ de $\mathcal{P}$. Donner une équation de la tangente à $\mathcal{P}$ en M.
4. On pose H le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$. Montrer que la médiatrice de $[FH]$ est également la tangente à $\mathcal{P}$ en M.
5. On considère le vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{t}{p} \end{pmatrix}$. Montrer que ce vecteur est normal à $\mathcal{P}$ en M (c'est à dire normal à la tangente en ce point).
6. On note $\vec{\imath}$ le premier vecteur de base de notre repère. Montrer que $(\widehat{\vec{\imath}, \vec{n}}) = (\widehat{\vec{n}, \overrightarrow{MF}})$

Exercice 3
Soit $\mathcal{P}$ une parabole de paramètre $p > 0$.

1. Soit $M_0 \in \mathcal{P}$. Sous quelle forme peuvent s'écrire les coordonnées de M_0 ?
2. Soit $\alpha > p$. On considère le point $A : \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe un unique cercle centré en A et de rayon noté $R(\alpha)$ tel qui soit tangent à $\mathcal{P}$ en exactement deux points. On exprimera $R(\alpha)$ en fonction de α et p.
   On entend par là que les tangentes aux points de contacts de $\mathcal{P}$ et de ce cercle sont confondues.
   Indication : chercher des conditions sur les points de contacts M_0.
3. Question bonus : chercher $\beta > \alpha$ tel que le cercle de centre $B : \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \end{pmatrix}$ et de rayon $R(\beta)$ soit tangent au premier cercle et montrer que $R(\beta) = R(\alpha) + 2p$.

Correction Dans le repère au sommet (le premier axe est l'axe focal), on a $\mathcal{P} : y^2 = 2px$.

1. On peut écrire $M_0 : \begin{pmatrix} \frac{y_0}{2p^2} \\ y_0 \end{pmatrix}$.
2. M_0 est un point de tangence pour le cercle ssi $\overrightarrow{AM_0}$ est orthogonal à la tangente en M_0.
   Or cette tangente à pour vecteur normal $\begin{pmatrix} -2p \\ 2y_0 \end{pmatrix}$ (calculé comme gradient, et qui est bien non nul ce qui prouve que M_0 est régulier).
   On veut donc $\vec{n}_0 = \begin{pmatrix} -p \\ y_0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM_0}$ colinéaires. $[\vec{n}_0, \overrightarrow{CM_0}] = 0 \iff \begin{vmatrix} -p & \frac{y_0}{2p^2} - \alpha \\ y_0 & y_0 \end{vmatrix} = 0 \iff y_0 = 0$ ou $-p - \frac{y_0^2}{2p} + \alpha = 0$.
   On cherche exactement deux points M_0 à une même distance de A, ainsi on a $y_0 = \pm\sqrt{2p(\alpha - p)}$ car $\alpha > 0$ ce qui donne bien deux points symétriques par rapport à (Ox).
   On a alors $R(\alpha) = \|AM_0\| = \sqrt{p^2 + 2p(\alpha - p)} = \sqrt{p(2\alpha - p)}$ après simplification.
3. Une idée de la démarche.
   — On veut $\alpha + R(\alpha) = \beta - R(\beta) =$ l'abscisse du point de tangence de nos cercles.
   — On regroupe les R et on observe que $R(\alpha) + R(\beta) = \frac{R(\alpha)^2 - R(\beta)^2}{R(\alpha) - R(\beta)}$ en utilisant la quantité conjuguée.
   — On peut maintenant exprimer $R(\alpha) - R(\beta)$ moyennant quelques calculs.

Vérification des méthodes

Exercice 4
Donner le domaine d'étude ainsi que les symétries à effectuer pour étudier :

1. $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(3t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}$
2. $t \mapsto \begin{pmatrix} \tan t \\ \cos t \end{pmatrix}$
3. $t \mapsto \begin{pmatrix} t^2 + t^4 \\ t + \frac{1}{t} \end{pmatrix}$
4. $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) + \sin(t) \\ \cos(t) - \sin(t) \end{pmatrix}$

Correction Seul le 1) est rédigé convenablement.

1. Notons $M_1(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$ le point de paramètre t. Alors $M_1(t+2\pi) = M_1(t)$ et donc la courbe est périodique de période 2π. On l'étudie sur $[-\pi, \pi]$. De plus $M_1(-t) = \begin{pmatrix} \cos(3t) \\ -\sin(2t) \end{pmatrix}$ est le symétrique de $M_1(t)$ par rapport à (Ox), donc on peut étudier la courbe sur $[0, \pi]$.
   Comme $M_1(\pi - t) = \begin{pmatrix} -\cos(3t) \\ \sin(3t) \end{pmatrix}$ est le symétrique de $M_1(t)$ par rapport à (Oy), on peut étudier la courbe sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
2. Attention au domaine de définition qui est $\mathbb{R}$ privé de tous les nombres de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.
   La période est 2π et on trouve une symétrie par rapport à (Oy) en utilisant la parité et une symétrie par rapport à O en calculant $M_2(\pi - t)$. On étudie la courbe sur $[0, \frac{\pi}{2}[$.
3. Pas de périodicité, la parité donne une symétrie par rapport à (Ox). Étude sur $]0, +\infty[$.
4. On peut réduire le domaine à $[0, \pi]$ en utilisant la parité et en trouvant une symétrie par rapport à $\mathcal{D} : y = x$. De plus $M_4(\pi - t) = \begin{pmatrix} -\cos(t) + \sin(t) \\ -\cos(t) - \sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_4(t) \\ -x_4(t) \end{pmatrix}$ (notation à préciser) est le symétrique de $M_4(t)$ par rapport à $\mathcal{D} : y = -x$. On peut étudier la courbe sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
   Une autre méthode : on factorise deux expressions de la forme $A\cos(t) + B\sin(t)$ par $\sqrt{A^2 + B^2}$ et on obtient $x_4(t) = \sqrt{2}\cos(t - \frac{\pi}{4})$ et $y_4(t) = \sqrt{2}\sin(t - \frac{\pi}{4})$ et le support est en fait le cercle de centre O et rayon $\sqrt{2}$.

Exercice 5
Donner une équation de la tangente au point de paramètre t_0 pour toutes les valeurs de t_0 possible dans chaque cas :

1. $t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ e^{-t^2} \end{pmatrix}$
2. $t \mapsto \begin{pmatrix} t + \frac{1}{t} \\ t\ln(t) - t \end{pmatrix}$

Correction

1. Pour $t_0 \in \mathbb{R}$ la fonction f considérée est dérivable en t_0 et $f'(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2t_0 e^{-t_0^2} \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ est directeur de la tangente T_0 au point de paramètre t_0.
   Ainsi $\begin{pmatrix} 2t_0 e^{-t_0^2} \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de T_0 et cette droite passe par le point $M_0 = \begin{pmatrix} t_0 \\ e^{-t_0^2} \end{pmatrix}$.
   Ainsi $T_0 : 2t_0 e^{t_0^2} x + y + c = 0$ où $c \in \mathbb{R}$ est tel que $M_0 \in T_0$ ie $2t_0^2 e^{-t_0^2} + e^{-t_0^2} + c = 0$. On en déduit c puis l'équation demandée.
2. Cette fois il faut prendre $t_0 > 0$ pour assurer la dérivabilité. $f'(t_0) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{t_0^2} \\ \ln(t_0) \end{pmatrix}$ qui s'annule ssi $t_0 = 1$.
   Pour toute les autres valeurs de t_0 on procède comme au point précédent : on calcule un vecteur normal puis la constante grâce au point M_0.
   Pour $t_0 = 1$, on doit dériver une autre fois (f est en fait $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$) et on obtient $f''(t_0) = \begin{pmatrix} \frac{2}{t_0^3} \\ \frac{1}{t_0} \end{pmatrix}$ et donc $f''(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ dirige la tangente Celle-ci passe par $M_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ainsi une équation est $-x + 2y + 4 = 0$.

Exercice 6
Etudier les points d'inflexions et les éventuelles branches infinies de $f : t \mapsto \begin{pmatrix} e^t \\ t^2 \end{pmatrix}$.

Correction Pré-requis : aller revoir les définitions des entiers p et q dans la partie étude locale des courbes.

On cherche le ou les points tels que p et q sont impairs. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et pour $t \in \mathbb{R}$ on a $f'(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 2t \end{pmatrix} \neq \vec{0}$. Donc au point de paramètre t, on a toujours $p = 1$.

De plus, $f''(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 2 \end{pmatrix}$. On veut savoir si $f'(t)$ et $f''(t)$ sont colinéaires. Or, dans la base canonique, $\det(f'(t), f''(t)) = 2e^t - 2te^t = 2e^t(1-t)$ qui vaut 0 ssi $t = 1$

Ainsi le seul point d'inflexion possible est en $t = 1$. Or $f^{(3)}(1) = \begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix}$ n'est pas colinéaire à $f'(1)$ et donc en $t = 1$ on a bien q $= 3$, ce qui donne un point d'inflexion.

Exercice 7
Étudier les branches infinies de $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (\frac{1}{t}, \frac{1}{e^t-1}) \end{array} \right.$.

Etude de courbes

Exercice 8
Etudier et tracer la courbe paramétrée par $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} \frac{t^3}{1+t^2} \\ \frac{t}{1+t^4} \end{pmatrix} \end{array} \right.$

Correction f est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ par quotients dont les dénominateurs ne s'annulent pas. On note $M(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ le point de paramètre t.

Pour $t \in \mathbb{R}$, on a $M(-t) = \begin{pmatrix} -x(t) \\ -y(t) \end{pmatrix}$ qui est le symétrique de $M(t)$ par rapport au point O. On effectue l'étude sur $[0, +\infty[$.

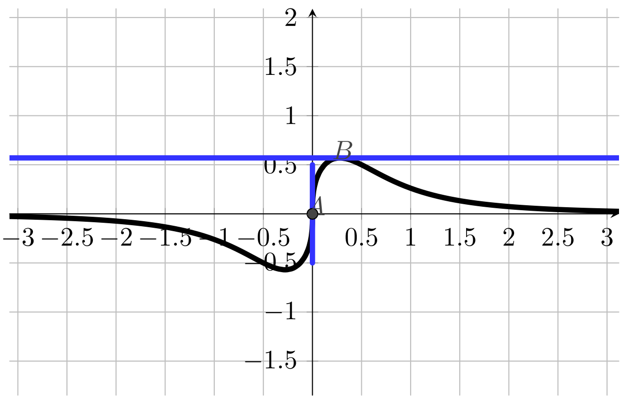
De plus, $x'(t) = \frac{3t^2(1+t^2)-t^3\times 2t}{(1+t^2)^2} = \frac{t^4+3t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{t^2(t^2+3)}{(1+t^2)^2}$.

De plus $y'(t) = \frac{(1+t^4)-4t^4}{(1+t^4)^2} = \frac{1-3t^4}{(1+t^4)^2} = \frac{(1-\sqrt{t^2})(1+\sqrt{3}t^2)}{(1+t^4)^2}$.

Or $1-\sqrt{3}t^2 \geqslant 0 \iff t \leqslant \frac{1}{3^{\frac{1}{4}}}$(pour les $t \geqslant 0$). On en déduit facilement le tableau de variations conjoint de x et y.

Observons que $x(t) \underset{+\infty}{\to} +\infty$ et $y(t) \underset{+\infty}{\to} 0$ (par quotient d'équivalents de fonctions polynomiales) et donc f possède une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ lorsque $t \to +\infty$.

La tangente en $t = 0$ est verticale et la tangente en $t = 3^{-\frac{1}{4}}$ est horizontale.



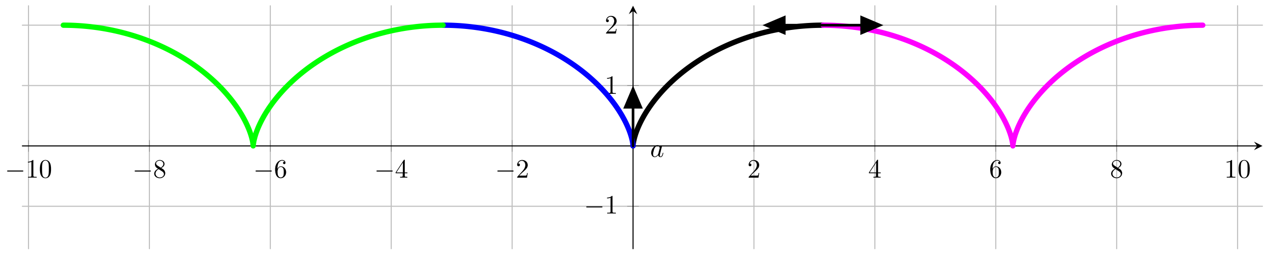
Exercice 9
Etudier et tracer la courbe $\begin{cases} x(t) = t - \sin(t) \\ y(t) = 1 - \cos(t) \end{cases}$. Pour réduire l'intervalle, on observera que $M(t+2\pi)$ est l'image de $M(t)$ par une certaine translation à préciser.

Correction On trouve que $M(t+2\pi) = M(t) + \begin{pmatrix} 2\pi \\ 0 \end{pmatrix}$ est l'image de $M(t)$ par la translation de vecteur $\begin{pmatrix} 2\pi \\ 0 \end{pmatrix}$. On étudie la courbe sur $[-\pi, \pi]$. x est impaire et y paire, on en déduit un symétrie par rapport à l'axe (Oy) et on étudie la courbe sur $[0, \pi]$.

x et y sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et, pour $t \in \mathbb{R}$ on a $x'(t) = 1 - \cos(t)$ et $y'(t) = \sin(t)$.

Ainsi $\begin{pmatrix} x'(\pi) \\ y'(\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ la tangente au point de paramètre π est donc horizontale. Au point de paramètre 0, on observe un point singulier et $x''(t) = \sin(t)$, $y''(t) = \cos(t)$. Ainsi $\begin{pmatrix} x''(0) \\ y''(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ qui est directeur de la tangente (verticale).

Finalement, on obtient le tracé :



Exercice 10
Etudier et tracer la courbe $t \mapsto \begin{pmatrix} 2\cos(t) - \cos(2t) \\ 2\sin(t) - \sin(2t) \end{pmatrix}$.

Correction On trouve sans difficulté une étude sur $[0, \pi]$ et une symétrie d'axe (Ox) Avec les notations des exercices précédents, x et y sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ par sommes et pour $t \in \mathbb{R}$

$$x'(t) = -2\sin(t) + 2\sin(2t) = 4\sin(t)\cos(t) - 2\sin(t) = 2\sin(t)(2\cos(t) - 1)$$

Pour $t \in [0, \pi]$, on a $2\cos(t) - 1 \geqslant 0 \iff \cos(t) \geqslant \frac{1}{2} \iff t \leqslant \frac{\pi}{3}$. De plus $\sin(t)$ est positif et s'annule seulement en 0 et π.

$$y'(t) = 2\cos(t) - 2\cos(2t) = 2(\cos(t) - (2\cos^2(t) - 1)) = -2(2\cos^2(t) - \cos(t) - 1)$$

Or , le trinôme $2X^2 - X - 1$ prend les signes suivants :

T	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$2T^2 - T - 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

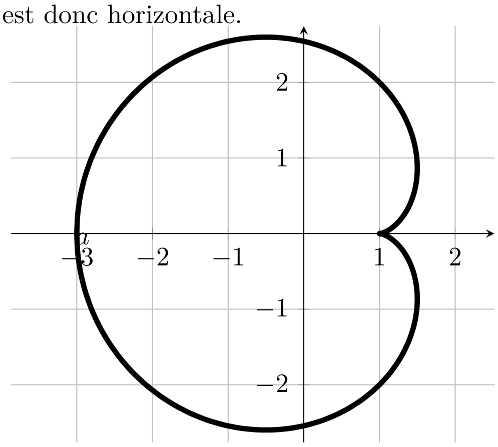
Or $\cos(t) \in [-\frac{1}{2}, 1]$ ssi $0 \leqslant t \leqslant \frac{2\pi}{3}$ (pour des valeurs de $t \in [0, \pi]$).

On en, déduit les variations :

t	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		$+\infty$
$x'(t)$	0	$+$	0		$-$		0
$x(t)$	1	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\searrow$	-3
$y(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0
$y'(t)$	0		$+$		0	$-$	

On observe un tangente verticale au point de paramètre $\frac{\pi}{3}$ et un tangente horizontale au point de paramètre $\frac{2\pi}{3}$. Le point de paramètre 0 est un point singulier.

Or $x''(t) = -2\cos(t) + 4\cos(2t)$ donc $x''(0) = 2 \neq 0$ et on trouve $y''(0) = 0$. Ainsi la tangente est dirigée par $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et est donc horizontale.



Exercice 11
On pose $\mathrm{th} = \frac{\mathrm{sh}}{\mathrm{ch}}$. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

On considère la courbe (Γ) définie par $\begin{cases} x : t \mapsto t - \mathrm{th}\, t \\ y : t \mapsto \frac{1}{\mathrm{ch}\, t} \end{cases}$

1. Etudier (Γ)
2. (Révisions de 1ère année)
   (a) Calculer $\operatorname{ch} t_0$ et $\operatorname{th} t_0$ pour t_0 tel que $\operatorname{sh} t_0 = 1$. Calculer ensuite t_0 sous la forme d'un logarithme.
   (b) Déterminer le point A de (Γ) où la tangente est de coefficient directeur -1. Déterminer une équation cartésienne de cette tangente et la tracer sur la courbe.
3. Donner l'équation de la tangente au point M de paramètre t. On note T_t cette tangente.
4. Montrer que l'intersection de T_t et de l'axe des abscisses est toujours un point.
5. On note N le point d'intersection de T_t et (Ox). Calculer la distance MN.

Paramétrage

Exercice 12

1. Paramétrer l'ensemble d'équation $x^3 + y^3 = 3xy$ en posant $t = \frac{y}{x}$.
2. Interpréter géométriquement le paramètre t puis le point $M(t)$.
3. Tracer