

# Table des matières

## I Rayon de convergence

- I.1 Série entière . . . . . 1
- I.2 Convergence d'une série entière . . . . . 1
- I.3 Calcul du rayon de convergence . . . . . 1
- I.4 d'Alembert . . . . . 2

## II Propriétés de la somme, cas réel

- II.1 Intégration . . . . . 2
- II.2 Dérivation . . . . . 2

## III Développement en série entière

- III.1 Fonctions développables . . . . . 2
- III.2 Développements en pratique . . . . . 3
  - III.2.1 Formulaire . . . . . 3

# I Rayon de convergence

## I.1 Série entière

### Définition 1

- Une série entière de variable  $z \in \mathbb{K}$  est une série de la forme  $\sum a_n z^n$  où  $a_n \in \mathbb{K}$ .
- Les termes de la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont appelés les coefficients de la série entière.
- Pour chaque  $z_0 \in \mathbb{K}$  on étudie la convergence de la série numérique  $\sum a_n z_0^n$ . L'ensemble des  $z_0 \in \mathbb{K}$  pour lesquels la série entière converge est appelé domaine de convergence.
- La somme de cette série entière est la **fonction**  $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$  définie sur le domaine de convergence.

Lorsque la variable est réelle, on la note  $x$  plutôt que  $z$ .

### Proposition 1 (Rappel)

Soit  $(b_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  une suite de nombres complexes.

$$b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \iff |b_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

## I.2 Convergence d'une série entière

### Théorème 1 (Lemme d'Abel)

1 Soit  $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ . Supposons qu'il existe  $r > 0$  tel que  $(|a_n| r^n)$  est une suite bornée. Alors pour tout  $z \in D_r$  (ie  $|z| < r$ )

$$|a_n z^n| = O_{+\infty} \left( \left( \frac{|z|}{r} \right)^n \right) \text{ et donc } \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n \text{ converge.}$$

### Définition-Proposition 1

2 Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière.

1. L'ensemble  $I = \{r \in \mathbb{R}^+ \mid (|a_n| r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  de la forme  $[0, a)$  (la deuxième borne est ouverte ou fermée, finie ou non)
2.  $R = \sup(I) \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$  est appelé **rayon de convergence** de la série entière

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$$

### Théorème 2

3 Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R > 0$ .

1. Si  $|z| < R$  alors la série numérique  $\sum a_n z^n$  converge absolument donc converge.
2. Si  $|z| > R$  alors la série numérique  $\sum a_n z^n$  diverge grossièrement.
3. Si  $|z| = R$  on ne peut pas conclure a priori sur la nature de  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ .

## I.3 Calcul du rayon de convergence

### Proposition 2

Soient  $\sum a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R_a$  et  $\sum b_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R_b$

1. Si  $|a_n| \leq |b_n|$  (au moins à partir d'un certain rang), alors  $R_a \geq R_b$
2. Si  $a_n = O_{+\infty}(|b_n|)$  alors  $R_a \geq R_b$  (en particulier dans le cas  $a_n = o_{+\infty}(|b_n|)$ ).
3. Si  $|a_n| \underset{+\infty}{\sim} |b_n|$  alors  $R_a = R_b$ .

### Théorème 3

Soient  $\sum a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R_a$  et  $\sum b_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R_b$ .

1. Pour  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ , la série entière  $\sum \lambda a_n z^n$  est de rayon de convergence  $R_a$ . Le cas  $\lambda = 0$  donne un rayon infini.
2. Le rayon de convergence  $R$  de la série  $\sum (a_n + b_n) x^n$  vérifie  $R = \min(R_a, R_b)$  si  $R_a \neq R_b$  et  $R \geq R_a$  dans le cas  $R_a = R_b$ .

3. Le rayon de convergence  $R$  de la série entière  $\sum c_n x^n = \sum a_n x^n \times \sum b_n x^n$  vérifie  $R \geq \min(R_a, R_b)$ .

Remarquons que les séries entières qui interviennent ici sont de rayon de convergence  $R$  exactement d'après 3

### Proposition 3

Soit  $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ . Les séries entières  $\sum a_n z^n$  et  $\sum n a_n z^n$  ont le même rayon de convergence.

## I.4 d'Alembert

### Théorème 4 (Règle de d'Alembert)

Soit  $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N} u_n > 0$ . Supposons que  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow \ell$ .

1. Si  $\ell < 1$  alors  $\sum u_n$  converge (on a même  $\forall q \in ]\ell, 1[ u_n = o_{+\infty}(q^n)$ ).
2. Si  $\ell > 1$  alors  $\sum u_n$  diverge grossièrement (car  $u_n \xrightarrow{+\infty} +\infty$ ).
3. Si  $\ell = 1$  la série  $\sum u_n$  peut être divergente ou convergente.

### Proposition 4

Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière. On suppose que  $a_n \neq 0$  (au moins à partir d'un certain rang).

Si  $\left(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)$  admet une limite  $\ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ , alors le rayon de convergence de  $\sum a_n z^n$  est :

- 0 dans le cas  $\ell = +\infty$
- $+\infty$  dans le cas  $\ell = 0$
- $\frac{1}{\ell}$  dans le cas  $\ell \in ]0, +\infty[$ .

## II Propriétés de la somme, cas réel

### II.1 Intégration

#### Théorème 5

Soit  $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  la somme d'une série entière de rayon de convergence  $R > 0$ .

Alors  $f$  est continue sur son domaine de convergence (qui inclut  $] -R, R[$  et peut être éventuellement fermé en  $\pm R$ ).

#### Théorème 6 (Intégration terme à terme)

Soit  $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  la somme d'une série entière de rayon de convergence  $R > 0$ .

$$\forall x \in ] -R, R[ \int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$$

## II.2 Dérivation

### Théorème 7 (Dérivation terme à terme)

Soit  $f$  la somme de la série entière  $\sum a_n x^n$  de rayon de convergence  $R > 0$ .

$f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -R, R[$  et pour  $x \in ] -R, R[$  on a

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

et plus généralement

$$\forall k \in \mathbb{N} \forall x \in ] -R, R[ f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} x^n$$

Remarquons que les série entière qui définissent  $f'$  et les  $f^{(k)}$  sont également de rayon de convergence  $R$ .

### Corollaire 1

Soit  $\sum a_n x^n$  une série entière de rayon de convergence  $R > 0$  et  $f$  sa somme. Alors  $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

### Corollaire 2 ("Identification" (unicité) des coefficients)

Les coefficients d'une série entière de **rayon non nul** sont uniques.

Plus précisément, si  $\sum a_n x^n$  et  $\sum b_n x^n$  sont de rayons non nuls et vérifient pour un  $\alpha > 0$  que

$$\forall x \in ] -\alpha, \alpha[ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

alors  $\forall n \in \mathbb{N} a_n = b_n$ .

## III Développement en série entière

### III.1 Fonctions développables

#### Définition 2

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $I$  tel que  $0 \in I$  et  $0$  n'est pas une borne de  $I$ . Le **développement de Taylor** de  $f$  est la série entière  $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ .

**Définition 3**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  où  $I$  est intervalle qui contient 0 (et 0 n'est pas une borne de  $I$ ). On dit que  $f$  est **développable en série entière** (au voisinage de 0) ssi il existe  $r > 0$  et une série entière  $\sum a_n x^n$  tels que :

- $] -r, r[ \subset I$
- $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$  est de rayon  $R \geq r$
- $\forall x \in ] -r, r[ \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ .

Autrement dit,  $f$  est la somme d'une série entière sur un intervalle  $] -r, r[ \neq \emptyset$  contenu dans  $I$ .

La série entière  $\sum a_n x^n$  est appelée **développement en série entière** de  $f$ .

**III.2 Développements en pratique**

**Proposition 5**

sin et cos sont développable en série entière sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \text{ et } \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

**Proposition 6**

sh et ch sont développable en série entière sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} \text{ et } \operatorname{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

**Proposition 7**

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ .  $f_\alpha : x \mapsto (1+x)^\alpha$  est développable en série entière sur  $] -1, 1[$  et

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

Le coefficient de  $x^n$  est un quotient d'un produit de  $n$  termes par  $n!$ .

Si  $\alpha \in \mathbb{N}$ , le rayon de convergence est  $+\infty$  et le développement est en fait une somme finie.

**III.2.1 Formulaire**

A savoir	
$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$	$x \in ] -1, 1[$
$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$	$x \in ] -1, 1[$
$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$	$x \in ] -1, 1[$
$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (\alpha-k)}{n!} x^n$	$x \in ] -1, 1[$
$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$	$x \in \mathbb{R}$
$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$x \in \mathbb{R}$
A savoir refaire	
$-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$	$x \in ] -1, 1[$
$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$	$x \in ] -1, 1[$
$\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{(2n+1)4^n} x^{2n+1}$	$x \in ] -1, 1[$
$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$	$x \in ] -1, 1[$