Devoir maison n°7

A rendre le 15/11

Exercice 1
Dans tout cet exercice, l'espace vectoriel de référence est $E = \mathbb{R}^3$ et on note $\mathcal{B}_c$ sa base canonique.

On pose $u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{D}_i = \mathrm{Vect}(u_i)$ pour tout $i \in [\![1, 3]\!]$.

On pose également $P_i = \mathrm{Vect}(u_j, u_k)$ pour tout triplet $\{i, j, k\} = \{1, 23\}$. Par exemple $P_1 = \mathrm{Vect}(u_2, u_3)$.

1. Montrer que $\mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2 \oplus \mathcal{D}_3 = \mathbb{R}^3$ et donner le lien avec la famille $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$.
2. Qu'en déduire pour $\mathcal{D}_i + P_i$ pour $i \in [\![1, 3]\!]$? Exprimer P_i comme une somme directe.
3. Justifier que P_1 est un hyperplan et donner une équation de P_1 (dans $\mathcal{B}_c$).
4. Question bonus : donner une équation de P_i dans $\mathcal{B}$ pour tout $i \in [\![1, 3]\!]$.
5. Pour $i \in [\![1, 3]\!]$, on note p_i la projection sur $\mathcal{D}_i$ parallèlement à P_i et s_i la symétrie par rapport à $\mathcal{D}_i$ et parallèlement à P_i.
   Pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, calculer $p_1(X)$ et en déduire la matrice de p_1 dans la base canonique.
6. Donner les matrices de chaque p_i dans la base $\mathcal{B}$ et montrer que $p_1 + p_2 + p_3 = Id_E$.
7. Calculer $s_1 + s_2 + s_3$.

Indications

1.
2. Ces deux espaces sont supplémentaires, le prouver.
3.
4. Ces équations sont très simples, mais il faut mettre en place les notations.
5. Voir la méthode dans le cours, on a deux hypothèses géométriques sur $p(X)$ qu'il faut traduire.
6. Ces matrices doivent être très simple. Revenir à la définition.
7. Il y a un lien entre s_i et p_i.