

Révisions

Exercice 1

On pose $E = \mathbb{R}^3$, $u \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ et $F = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid u \wedge v = 0_{\mathbb{R}^3}\}$. Montrer (sans raisonnement géométrique) que F est un espace vectoriel.

Cette fois géométriquement, que peut-on dire de F ?

Exercice 2

Dans \mathbb{R}^3 , on pose $u = (-1, 1, 0)$, $v = (2, 0, 1)$, $w = (1, 1, 1)$. Donner une base, la dimension et un supplémentaire de $F = \text{Vect}(u, v, w)$.

Exercice 3

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto P - (1+X)P' \end{cases}$. Montrer que f est linéaire et donner des bases de $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$.

Exercice 4

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$. On suppose $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont stables par g .

Exercice 5

Soient E, F deux espaces vectoriels et $f : E \rightarrow F$ linéaire

On suppose qu'il existe une famille génératrice de E .

1. Montrer que f est injective si et seulement si f transforme toute famille libre de E en une famille libre de F
2. Montrer que f est surjective si et seulement s'il existe une famille génératrice de E transformée par f en une famille génératrice de F

Manipulations d'espaces

Exercice 6

Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{K} , et F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Montrer : $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 7

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. On considère H_1, H_2 deux hyperplans de E .

Que dire de la dimension de $H_1 \cap H_2$?

Exercice 8

Vrai ou Faux ?

Soit E un \mathbb{R} -e.v. (non nécessairement de dimension finie), et f et g deux endomorphismes de E .

1. $f \circ f = 0 \Leftrightarrow f = 0$.
2. $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}g$.
3. $\text{Im}g \subset \text{Im}(g \circ f)$.
4. $\ker(g \circ f) \subset \ker f$.
5. $\ker f \subset \ker(g \circ f)$.
6. $\text{Im}f \subset \ker f \Leftrightarrow f^2 = 0$.
7. $\text{Im}f \cap \ker f = f(\ker f^2)$.
8. Si f est injective, alors f est bijective.
9. $f(\ker(g \circ f)) = \ker g \cap \text{Im}f$.

Familles libres et génératrices

Exercice 9

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme non nul de E (espace de dimension n). On suppose qu'il existe un entier naturel p tel que $f^p = 0$ et on prend p le plus petit possible ie. $f^{p-1} \neq 0$.

1. Soit $x \in E$; On suppose, pour un entier naturel k , que $f^k(x) = 0_E$. Que dire de $f^r(x)$ lorsque $r \geq k$?
2. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est libre.
3. Montrer que $f^n = 0$.

Exercice 10

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \mapsto \cos(nx)$ et $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Montrer que $(f_n)_{n \in [0, p]}$ est une famille libre de E pour tout $p \in \mathbb{N}$. Qu'en déduire sur l'espace E ?

Indication : on pourra procéder par récurrence et utiliser la dérivation.

Exercice 11

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ telle que

$$\text{pour tout } x \in E, (x, u(x)) \text{ est une famille liée.}$$

Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E .

1. Montrer qu'il existe $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n$ tels que $u(e_i) = \lambda_i e_i$ pour tout $i \in [1, n]$.
2. En considérant $e_i + e_j$, montrer que $\lambda_i = \lambda_j$ pour $i \neq j$.
3. Donner l'ensemble des endomorphismes u vérifiant la propriété de l'énoncé.
4. Quels sont les matrices $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec toutes les autres matrices ?
On introduira u , l'endomorphisme canoniquement associé à M et on utilisera l'hypothèse de commutation sur des projecteurs bien choisis.

Sommes directes

Exercice 12

Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{K} de dimension finie $n \geq 1$, et F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E de même dimension.

Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel G de E tel que : $E = F_1 \oplus G = F_2 \oplus G$.

On pourra admettre le résultat de l'exercice 6

Exercice 13

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. et $f \in \mathcal{L}(E)$. On note $F_1 = \ker(f)$, $F_2 = \ker(f - Id_E)$, $F_3 = \ker(f - 2Id_E)$.

1. Montrer que l'on a la somme directe $F_1 + F_2 + F_3 = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$
2. On suppose maintenant que $f^3 - 3f^2 + 2f = 0$. Montrer que $E = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$.
3. En notant r_i la dimension de F_i , donner la matrice de f dans une base adaptée à la somme précédente.

Projections, symétries

Exercice 14

On se place dans \mathbb{R}^2 . On pose $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique et $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $D_u = \text{Vect}(u)$ et $D_v = \text{Vect}(v)$ sont supplémentaires dans \mathbb{R}^2 .
2. On note p le projecteur sur D_u parallèlement à D_v et s la symétrie associée. Pour $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, calculer $p \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et en déduire la matrice de p dans \mathcal{B} . Même question pour s
3. Calculer les matrices de p et s dans $\mathcal{B}' = (u, v)$

Exercice 15

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension 3, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = A$.

1. Calculer A^2 . Qu'en déduire pour f ?
2. Donner une base de $\ker(f)$ et une base de $\text{Im}(f)$ puis la matrice de f dans une base adaptée à $\text{Im}(f) \oplus \ker(f) = E$.

Exercice 16

Soient E, F 2 \mathbb{K} -ev. Soient de plus $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, E)$ telles que $u \circ v = Id_F$. Montrer que $v \circ u$ est un projecteur et préciser ses éléments caractéristiques (projecteur sur quel espace, parallèlement à quel autre ?).

Exercice 17

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur.

Montrer que $u \circ p = p \circ u$ si et seulement si $\ker(p)$ et $\text{Im}(p)$ sont stables par u .