Calcul de rayon

Exercice 1
On considère une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ d'une variable réelle x. On note R son rayon de convergence.

1. Si on suppose que $\sum_{n\geqslant 0} a_n 2^n$ est convergente, que dire de R ?
2. Si on suppose que $\sum_{n\geqslant 0} a_n 2^n$ est divergente, que dire de R ?
3. Si on suppose que $\sum_{n\geqslant 0} a_n 3^n$ converge, mais ne converge pas absolument, que dire de R ?

Exercice 2
Calculer le rayon de convergence de $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ lorsque :

$$\text{a) } a_n = 2+ni \quad \text{b) } a_n = \frac{\operatorname{sh} n}{\operatorname{ch}^2 n} \quad \text{c) } a_{2n} = 2^n \text{ et } a_{2n+1} = 0 \quad \text{d) } a_n = \left(\frac{1}{1+\sqrt{n}}\right)^n$$

$$\text{e) } a_n = \frac{(\ln n)^2}{\sqrt{n}} \quad \text{f) } a_n = n^{\ln(n)}$$

Exercice 3
Déterminer le rayon et le domaine de convergence de chacune des séries entières suivantes :

$$\text{a) } \sum_{n\geqslant 0} n! z^n \quad \text{b) } \sum_{n\geqslant 0} n! z^{n^2} \quad \text{c) } \sum_{n\geqslant 0} z^{n!}$$

Calcul de somme

Exercice 4

1. Déterminer le rayon de convergence R et calculer pour tout $x \in \,]-R, R[$, la somme $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n^2+n+1)x^n$.

   Indication : on pourra décomposer le facteur de x^n selon la base $(1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2), \dots)$
2. Mêmes questions lorsque $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+n+1}{n!} x^n$.

Exercice 5
Prouver la convergence et calculer la somme de $\sum_{n\geqslant 0} (n+1)p(1-p)^n$, $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2}{2^n}$ où $p \in]0,1[$.

Exercice 6
Soit $a \geq 0$. Rayon de convergence et somme de $\sum_{n\geqslant 0} \operatorname{ch}(na)x^n$, $\sum_{n\geqslant 0} \frac{\cos(na)x^n}{n!}$

Exercice 7
Calculer le rayon de convergence et la somme des séries entières suivantes ($x \in \mathbb{R}$) :

$$a) \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^{3n}}{n+1} \quad b) \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{(2n)!} \quad c) \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n+2}{n+1} x^n \quad d) \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n! \times (2n+1) \times (2n-1) \times \cdots \times 3 \times 1}.$$

Développements

Exercice 8
Montrer que $x \mapsto \frac{\arctan(x)}{x}$ se prolonge sur $\mathbb{R}$ en une fonction $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 9
Donner le développement en série entière (DSE) au voisinage de 0 ($x \in \mathbb{R}$) des fonctions suivantes en précisant le rayon de convergence de la série entière obtenue :

1. $f_1 : x \mapsto \frac{1}{2+x}$
2. $f_2 : x \mapsto \ln(4-x^2)$.
3. $f_3 : x \mapsto \ln(x^2+5x+4)$.
4. $f_4 : x \mapsto e^x \sin(x)$
5. $f_5 : x \mapsto \operatorname{sh}(x)\cos(x)$.
6. $f_6 : x \mapsto \int_x^1 \frac{\cos(t)-1}{t} \mathrm{d}t$.

Exercice 10
Pour $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, on note $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et on étudie la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} S_n x^n$. On note R son rayon de convergence.

1. Démontrer que $R = 1$. On pourra encadrer S_n.
2. Pour $x \in]-1,1[$, on pose $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} S_n x^n$. Montrer que pour $x \in]-1,1[$ on a $(1-x)f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.
3. En déduire une expression simple de f.

Exercice 11
On cherche les solutions développables en série entière sur un domaine $]-R, R[\subset \mathbb{R}$, $R > 0$, de l'équation différentielle :

$$\forall x \in]-R,R[\qquad (1-x^2)y'(x) - xy(x) = 1 \tag{E}$$

sous la forme

$$\forall x \in]-R,R[\qquad y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

où, pour tout entier naturel n, a_n est un réel. On pose : $a_0 = \lambda \in \mathbb{R}$.

1. Que vaut a_1 ?
2. Donner, pour tout entier naturel non nul n, une relation de récurrence reliant a_{n+1} et a_{n-1}.
3. Exprimer, pour tout entier naturel p, a_{2p} et a_{2p+1} en fonction de p et λ.

Exercice 12
Développer en série entière de la fonction de la variable réelle f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x\cos(\alpha) + 1}$$

On précisera l'ensemble de définition de f et on discutera selon la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$.
INDICATION : on pourra écrire $1-2x\cos(\alpha)+x^2 = \left(x - e^{i\alpha}\right)\left(x - e^{-i\alpha}\right)$ et chercher a, b tels que $f(x) = \dfrac{a}{x - e^{i\alpha}} + \dfrac{b}{x - e^{-i\alpha}}$.

Exercice 13

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f d'une variable réelle définie par $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n+1)(2n+1)}$
2. Calculer la dérivée seconde de $x \mapsto x^2 f(x^2)$ pour x appartenant à l'intérieur de D.
3. En déduire une expression simple de $f(x)$ pour tout $x \in D$.