Devoir maison 6

A rendre le au plus tard le 08/11/2022.

Exercice 1
Posons $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.

1. On note $G = \{AB - BA \mid (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2\} = \{C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \exists (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2\ C = AB - BA\}$ et $F = \mathrm{Vect}(G)$.
   (a) Donner un exemple explicite d'une matrice non nulle de G dans le cas $n = 2$.

   Correction Prenons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $M = AB - BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est une matrice non nulle de G

   (b) Montrer que $G \subset \ker(\mathrm{tr})$ puis $F \subset \ker(\mathrm{tr})$.

   Correction Soit $M \in G$. On peut poser $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = AB - BA$. Alors $\mathrm{tr}(M) = \mathrm{tr}(AB - BA) = \mathrm{tr}(AB) - \mathrm{tr}(BA) = 0$ et donc $M \in \ker(\mathrm{tr})$.
   Ainsi $G \subset (\ker(\mathrm{tr}))$. Comme $\ker(\mathrm{tr})$ est un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a également $F \subset (\ker(\mathrm{tr}))$.

   (c) On note $E_{i,j}$ les matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Calculer $E_{i,j}E_{k,l}$ pour $i, j, k, l \in [\![1, n]\!]$.

   Correction $E_{i,j}E_{k,l} = \begin{cases} 0 \text{ si } j \neq k \\ E_{i,l} \text{ si } j = k \end{cases}$, voir le TD.

   (d) Soient $i, j \in [\![1, n]\!]$ des entiers distincts. Montrer que $E_{i,i} - E_{j,j} \in G$ et $E_{1,i} \in G$ (dans le cas $i \neq 1$ pour la deuxième).

   Correction Remarquons que $E_{i,j}E_{j,i} - E_{j,i}E_{i,j} = E_{i,i} - E_{j,j}$ d'après la question précédente. Ainsi $E_{i,i} - E_{j,j} \in G$ (on a exhibé A, B convenables).
   De plus, $E_{i,i}E_{i,j} - E_{i,j}E_{i,i} = E_{i,j} - 0 \in G$.

   (e) Qu'en déduire pour la dimension de F ? On traitera d'abord les cas $n = 2$ et $n = 3$.

   Correction On considère la famille $\mathcal{B}$ composée de tous les $E_{i,j}$ avec $i \neq j$ ($n^2 - n$ matrices) et des matrices $E_{1,1} - E_{i,i}$ pour $i > 1$ ($n - 1$ matrices).
   La famille $\mathcal{B}$ est libre (il suffit d'écrire un combinaison nulle de ces éléments pour voir sur chaque coefficient de la matrice obtenue excepté celui en position 1, 1 sont les coefficients de la combinaison).
   Ainsi $\dim(F) \geqslant n^2 - 1$.

   (f) Déterminer $\dim(\ker(\mathrm{tr}))$ et en déduire que $F = \ker(\mathrm{tr})$.

   Correction $\mathrm{tr} \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$ donc $\mathrm{rg}(\mathrm{tr}) \leqslant 1$. Or tr n'est pas l'endomorphisme nul (par exemple $\mathrm{tr}(I_n) = n \neq 0$) et donc $\mathrm{rg}(\mathrm{tr}) \neq 0$.
   Ainsi $\mathrm{rg}(\mathrm{tr}) = 1$ et d'après le théorème du rang, $\dim(\ker(\mathrm{tr})) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})) - \mathrm{rg}(\mathrm{tr}) = n^2 - 1$.
   On a donc $\begin{cases} F \subset \ker(\mathrm{tr}) \\ \dim(F) \geqslant \dim(\ker(\mathrm{tr})) \end{cases}$. Ainsi $\dim(F) = \dim(\ker(\mathrm{tr}))$ et finalement $F = \ker(\mathrm{tr})$.

   (g) Est-ce que $I_n \in F$?

   Correction On a vu que $I_n \notin \ker(\mathrm{tr})$ donc $I_n \notin F$. Il est vain de vouloir trouver deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB - BA = I_n$.

2. On note $E = \{f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K}) \mid \forall (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2\ f(AB) = f(BA)\}$. Les éléments de E sont ainsi des formes linéaires.
   (a) Rappeler la dimension de $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$.

   Correction D'après le cours, $\dim(\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})) \times \dim(\mathbb{K}) = n^2$.

(b) Montrer que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Donner en plus un élément non nul de E.

Correction Remarquons d'abord que la forme linéaire nulle est clairement dans E
Soient $f, g \in E, \lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Montrons que $\lambda f + \mu g \in E$.
D'après le cours, $\lambda f + \mu g$ est linéaire. Montrons maintenant que $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ $(\lambda f + \mu g)(AB) = (\lambda f + \mu g)(BA)$.
Or, pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $(\lambda f + \mu g)(AB) = \lambda f(AB) + \mu g(AB) = \lambda f(BA) + \mu g(BA) = (\lambda f + \mu g)(BA)$.
Ainsi E est un espace vectoriel qui contient $\mathrm{tr} \neq 0_{\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})}$.

(c) Soit $f \in E$. Montrer que $\ker(\mathrm{tr}) \subset \ker(f)$.

Correction Soit $M \in \ker(\mathrm{tr})$. Alors $M \in F$ et on peut écrire $M = AB - BA$ pour des matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ bien choisies.
Mais alors $f(M) = f(AB - BA) = f(AB) - f(BA) = 0$. Donc $M\ in \ker(f)$ et on a bien $\ker(\mathrm{tr}) = \ker(f)$.

(d) En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f = \lambda\,\mathrm{tr}$.

Correction Deux cas se présentent :

— si $f = 0$ alors $\lambda = 0$.

— Si $f \neq 0$, alors le raisonnement de la question $1e$ prouve que $\ker(\mathrm{tr}) = \ker(f) = F$. D'après le cours, deux formes linéaires non nulles qui ont le même noyau sont proportionnelles.

(e) Déterminer une base et la dimension de E.

Correction D'après la question précédente, $E = \mathrm{Vect}(\mathrm{tr})$ est une droite dont une base est (tr).

Cet exercice démontre un résultat intéressant : la propriété qui permet de montrer que deux matrices semblables ont la même trace (aller re-jeter un oeil à ce cours par la même occasion) est en fait caractéristique de la trace parmi les formes linéaires (à une constante multiplicative près, seule la trace possède cette propriété).

Exercice 2 (Révisions sur les séries)

On définit deux suites par : $\begin{cases} \forall n \geqslant 1 \ H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\ \forall n \geqslant 2 \ a_n = \frac{1}{n} H_{n-1} \end{cases}$.

1. Rappeler la limite de (H_n).

Correction (H_n) est la série harmonique, et donc $H_n \underset{n \to +\infty}{\to} +\infty$.

2. Étudier la nature de $\sum a_n$.

Correction D'après la question précédente, $\frac{1}{n} = o_{+\infty}(a_n)$ et donc, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum a_n$ diverge.

3. Étudier la nature de $\sum (-1)^n a_n$.

Correction Ce pourrait être une série alternée convergente.
Étudions la monotonie de la suite positive (a_n). Pour $n \geqslant 2$ on a

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n = \frac{H_n}{n+1} - \frac{H_{n-1}}{n} &= \frac{nH_n - (n+1)H_{n-1}}{n(n+1)} = \frac{n(H_n - H_{n-1}) - H_{n-1}}{n(n+1)} \\ &= \frac{1 - H_{n-1}}{n(n+1)} \leqslant 0 \end{aligned}$$

car le premier terme de H_{n-1} est 1.
Ainsi (a_n) est décroissante.
Montrons maintenant que $a_n \to 0$. On a prouvé en cours que $H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$ et donc par croissances comparées, $a_n \to 0$.
Finalement, $\sum (-1)^n a_n$ est une série alternée convergente.

4. Montrer que $\forall x \in]-1,1[\ \sum a_n x^n$ converge.

   Correction Soit $x \in]-1,1[,\ x \neq 0$. On pose, pour $n \geqslant 2$, $u_n = |a_n x^n| > 0$.
   Alors

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{H_n|x^{n+1}|}{n+1} \times \frac{n}{H_{n-1}|x|^n} = \frac{nH_n}{(n+1)H_{n-1}}|x| = \frac{n(H_{n-1}+\frac{1}{n})}{(n+1)H_{n-1}}|x| \\ &\underset{+\infty}{\sim} \frac{nH_{n-1}}{nH_{n-1}}|x| = |x| \text{ car on a } \frac{1}{n} = o_{+\infty}(H_{n-1})\end{aligned}$$

   Or $|x| < 1$ et donc d'après la règle de d'Alembert, $\sum a_n x^n$ converge absolument donc converge.
   Dans le cas $x = 0$, la série $\sum a_n 0^n$ converge car la suite des somme partielles est constante égale à 0 (il n'y a pas de terme pour $n = 0$.)

5. Montrer que $\forall x \in]-1,1[\ \sum H_n x^n$ converge. On note $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} H_n x^n$ pour $x \in]-1,1[$.

   Correction On peut faire le même raisonnement et un calcul tout à fait similaire.

6. Pour $x \in]-1,1[$, exprimer $(1-x)S(x)$ sous la forme $\sum b_n x^n$ (où b_n est un coefficient, à trouver) et intuiter la valeur de $S(x)$.

   Correction On a

$$\begin{aligned}(1-x)S(x) = S(x) - xS(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^{n+1} \text{ ces deux séries convergent} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} H_{n-1} x^n = H_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty}(H_n - H_{n-1})x^n \\ &= x + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}x^n\end{aligned}$$

   Les sommes partielles de la dernière série sont les parties régulières des développements limités de $-\ln(1-x)$, on pourrait donc avoir

$$(1-x)S(x) = -\ln(1-x) \text{ ou encore } S(x) = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$$

   Nous verrons dans le chapitre 5 que c'est bien le cas, pour $x \in]-1,1[$.

Indications :

Exercice 1

1. Les éléments de F sont des combinaisons linéaires d'éléments de G.
   (a) Il s'agit de trouver un exemple de matrice M de G, c'est à dire des matrices A, B telles que $M = AB - BA \neq 0$.
   (b) La deuxième inclusion est une conséquence directe de la première.
   Pour la première, nous avons une méthode très générale pour montrer une inclusions : Soit $C \in G$. Montrons que $C \in \ker(\mathrm{tr})$....
   (c)
   (d) Il faut trouver à chaque fois des matrices A et B convenables.
   (e) On doit trouver une inégalité pour la dimension, à chaque fois.
   (f) On veut la dimension d'un noyau. Deux méthodes : expliciter ce noyau en résolvant une équation homogène ou utiliser un théorème...
   (g)
2. (a)
   (b) Montrer que c'est un sous-espace de $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$.
   (c) Encore une inclusion
   (d) Attention à utiliser correctement le résultat du cours.
   (e) On vient de décrire tous les éléments de E....

Exercice 2

1. C'est une série connue.
2. On trouve une série divergente.
3. La forme de la série donne le théorème à utiliser.
4. Attention à l'hypothèse à vérifier pour appliquer d'Alembert.
5.
6. On pourra développer et faire un changement d'indice. Pour intuiter la valeur de $S(x)$ on pourra reconnaître les sommes partielles de la série précédente comme partie polynomiale d'un DL connu.