

# Table des matières

- I Elements propres**
  - I.1 Valeurs et vecteurs propres . . . . . 1
  - I.2 Espaces propres . . . . . 1
  - I.3 Stabilité (★) . . . . . 1
- II En dimension finie**
  - II.1 Polynôme caractéristique . . . . . 1
  - II.2 Lien avec les valeurs propres . . . . . 2
- III Diagonalisation**
  - III.1 Diagonalisabilité . . . . . 2
  - III.2 Applications . . . . . 3
- IV Trigonalisation**
  - IV.1 Théorie . . . . . 3
  - IV.2 Conséquences pratiques . . . . . 3
  - IV.3 Deviner la dernière valeur propre . . . . . 3

## I Elements propres

### I.1 Valeurs et vecteurs propres

#### Définition 1 (Valeur propre et vecteur propre)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $f \in \mathcal{L}(E)$ .

Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ . On dit que  $\lambda$  est une valeur propre de  $f$  ssi il existe un  $x \in E$  **non nul** tel que  $f(x) = \lambda x$ . Un tel  $x$  **non nul** est appelé un vecteur propre de  $f$  associé à la valeur propre  $\lambda$ .

L'ensemble des valeurs propres de  $f$  est appelé le spectre de  $f$  et noté  $Sp(f)$ .

#### Définition 2 (Vecteur propre et valeur propre)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $f \in \mathcal{L}(E)$ .

Soit  $x \in E$ . On dit que  $x$  est un vecteur propre de  $f$  ssi

$$\begin{cases} x \neq 0_E \\ \exists \lambda \in \mathbb{K} \quad f(x) = \lambda x \end{cases}$$

On dit que  $x$  est associé à la valeur propre  $\lambda$ .

#### Proposition 1

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $f \in \mathcal{L}(E)$ .

Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Alors on a

$$\lambda \text{ est une valeur propre de } f \iff \ker(f - \lambda Id_E) \neq \{0_E\}$$

#### Définition 3

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ . On dit que  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$  ssi il existe un  $X \in \mathbb{K}^n$  **non nul** tel que  $AX = \lambda X$ . Un tel  $X$  **non nul** est appelé un vecteur propre de  $f$  associé à la valeur propre  $\lambda$ .

En résumé : les valeurs propres et vecteurs propres de  $A$  sont les valeurs propres et vecteurs propres de l'application linéaire canoniquement associée à  $A$ ,  $f_A : \begin{cases} \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n \\ X \mapsto AX \end{cases}$ .

On note  $Sp(A) = Sp(f_A)$  le spectre de  $A$  (l'ensemble de ses valeurs propres)

### I.2 Espaces propres

#### Définition 4

1. Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$  une valeur propre de  $f$ . L'espace propre associé à  $\lambda$  est l'espace  $E_\lambda(f) = \ker(f - \lambda Id_E) = \ker(\lambda Id_E - f) \neq \{0_E\}$ .

Il s'agit de l'ensemble composé du vecteur nul et de tous les vecteurs propres associés à  $\lambda$ . On le note parfois aussi  $E_\lambda$ .

2. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$  une valeur propre de  $A$ . L'espace propre associé à  $\lambda$  est l'espace  $E_\lambda(A) = \ker(A - \lambda I_n) = \ker(\lambda I_n - A) \neq \{0_{\mathbb{K}^n}\}$ .

#### Théorème 1

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  des valeurs propres 2 à 2 distinctes de  $f$ . Pour  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$  on pose  $v_i$  un vecteur propre associé à  $\lambda_i$  (il est donc non nul).

La famille  $(v_1, \dots, v_p)$  est libre.

#### Théorème 2

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  des valeurs propres 2 à 2 distinctes de  $f$ .

La somme  $\sum_{i=1}^k E_{\lambda_i}(f)$  est directe ie  $\sum_{i=1}^k E_{\lambda_i} = \bigoplus_{i=1}^k E_{\lambda_i}$

### I.3 Stabilité (★)

#### Proposition 2

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ .

Si  $D$  est une droite de  $E$  stable par  $f$ , alors  $D$  est dirigée par un vecteur propre de  $f$ .

**Proposition 3**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$  une valeur propre de  $f$ . Alors  $E_\lambda(f)$  est stable par  $f$ .

**Proposition 4**

Soient  $f, g \in \mathcal{L}(E)$  tels que  $f \circ g = g \circ f$ .

1.  $\ker(f)$  et  $\text{Im}(f)$  sont stables par  $g$ .
2. Tout espace propre de  $f$  est stable par  $g$ .

Evidemment, on peut échanger les rôles de  $f$  et  $g$  dans ces résultats.

**Proposition 5**

Soient  $f, g \in \mathcal{L}(E)$ . On suppose  $f \circ g = g \circ f$ .

Toute droite propre de  $f$  est aussi une droite propre pour  $g$  et toute droite propre pour  $g$  est une droite propre pour  $f$ .

## II En dimension finie

### II.1 Polynôme caractéristique

**Définition-Proposition 1**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Le polynôme caractéristique de  $A$  est le polynôme  $\chi_A$  associée à la

$$\text{fonction } \chi_A : \begin{cases} \mathbb{K} & \rightarrow \mathbb{K} \\ x & \mapsto \det(xI_n - A) \end{cases} .$$

$\chi_A$  est un polynôme **unitaire** (son coefficient dominant est 1) de **degré**  $n$ , la taille de  $A$ .

**Proposition 6**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Le coefficient constant de  $\chi_A$  est  $(-1)^n \det(A)$  et le coefficient de  $X^{n-1}$  est  $-\text{tr}(A)$ . Ainsi

$$\chi_A(X) = X^n - \text{tr}(A)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A)$$

Ce résultat est également valable pour les endomorphismes.

**Définition 5**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ , où  $E$  est de dimension  $n$ . Le polynôme caractéristique  $\chi_f$  de  $f$  est le polynôme associé à l'application  $x \mapsto \det(xId_E - f)$ . C'est un polynôme unitaire de degré  $n$ .

Si  $A$  est la matrice de  $f$  dans une base  $\mathcal{B}$  quelconque de  $E$  alors  $\chi_f = \chi_A$ .

### II.2 Lien avec les valeurs propres

**Théorème 3**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$

1.  $\lambda$  est une valeur propre de  $f$  ssi  $\chi_f(\lambda) = 0$  ie  $\lambda$  est une racine de  $\chi_f$ .
2.  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$  ssi  $\chi_A(\lambda) = 0$  ie  $\lambda$  est une racine de  $\chi_A$ .

**Théorème 4 (Rappel : d'Alembert-Gauss)**

Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$ .

- Si  $P$  est non constant, alors  $P$  possède un moins une racine dans  $\mathbb{C}$ .
- Si  $P$  est non nul, il possède exactement autant de racine dans  $\mathbb{C}$  (comptées avec multiplicités) que son degré. On dit que  $P$  est **scindé**.

Conséquence ici : Toute matrice  $A \in M_n(\mathbb{C})$  possède au moins une valeur propre.

**Proposition 7 (Déterminant triangulaire par bloc)**

Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  de la forme  $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$  où  $A, C$  sont des matrices carrées (de tailles quelconques, y compris 1). Alors  $\det(M) = \det(A) \det(C)$ .

**Théorème 5**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $\lambda \in Sp(f)$ . Notons  $\mu(\lambda)$  la multiplicité de  $\lambda$  comme racine de  $\chi_f$  (on appelle cette quantité la multiplicité de la valeur propre  $\lambda$ ).

$$1 \leq \dim(E_\lambda(f)) \leq \mu(\lambda)$$

**Corollaire 1**

Si  $\lambda$  est une racine simple de  $\chi_A$  ou  $\chi_f$ , alors  $E_\lambda$  est une droite.

## III Diagonalisation

### III.1 Diagonalisabilité

**Définition 6**

1. Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . On dit que  $f$  est **diagonalisable** ssi il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  telle que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$  est diagonale.
2. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On dit que  $A$  est diagonalisable ssi  $A$  est semblable à une matrice diagonale (il existe une matrice inversible  $P$  et une matrice diagonale  $D$  telles que  $D = P^{-1}AP$  et  $A = PDP^{-1}$ .)

**Proposition 8**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ .  $f$  est diagonalisable ssi il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  composée de vecteurs propres de  $f$ .

Dans ce cas  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$  est diagonale et sa diagonale est composée des valeurs propres de  $f$  associées aux vecteurs propres de  $\mathcal{B}$  (les valeurs propres sont dans l'ordre des vecteurs de  $\mathcal{B}$ ).

### Proposition 9

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

$A$  est diagonalisable ssi il existe une base  $\mathcal{B}$  composée de vecteurs propres de  $A$ . En notant  $\mathcal{B}_c$  la base canonique de  $\mathbb{K}^n$  et  $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}_c} \mathcal{B}$  la matrice dont les colonnes sont les vecteurs propres de  $A$  on a

$$D = P^{-1}AP \text{ est diagonale}$$

et la diagonale de  $D$  est composée des valeurs propres de  $A$  associées respectivement aux vecteurs propres de  $\mathcal{B}$  (dans le même ordre).

On a alors  $A = PDP^{-1}$ .

### Théorème 6

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ .  $f$  est diagonalisable ssi  $\bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} E_{\lambda} = E$ .

### Théorème 7

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ .

$f$  est diagonalisable sur  $\mathbb{K}$  ssi  $\chi_f$  est scindé sur  $\mathbb{K}$  et pour tout  $\lambda \in Sp(f)$  on a  $\dim(E_{\lambda}) = \mu(\lambda)$  (la multiplicité de  $\lambda$  en tant que racine de  $\chi_f$ ).

### Proposition 10

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . SI  $\chi_f$  est scindé sur  $\mathbb{K}$  et à racines simples ALORS  $f$  est diagonalisable.

## III.2 Applications

### Théorème 8

Soit  $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  une suite et  $p \geq 1$ . On suppose qu'il existe  $a_0, \dots, a_{p-1} \in \mathbb{K}$  tels que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+p} = \sum_{k=0}^{p-1} a_k u_{n+k}.$$

1. Le polynôme  $P = -\sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k + X^p$  est appelé polynôme caractéristique de  $(u_n)$ .
2. Si  $P$  est scindé à racines simples, notées  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  alors il existe des scalaires  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$  tels que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \sum_{k=1}^p \alpha_k \lambda_k^n$$

## IV Trigonalisation

### IV.1 Théorie

#### Théorème 9

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ .  $\chi_f$  est scindé sur  $\mathbb{K}$  ssi il existe une base  $\mathcal{B}$  telle que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$  est triangulaire supérieure (on dit que  $f$  est trigonalisable).

La diagonale est constituée de toutes les racines de  $\chi_f$ , avec multiplicité (une racine de multiplicité  $r$  apparaît  $r$  fois sur cette diagonale).

#### Corollaire 2

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Alors  $A$  est trigonalisable dans  $\mathbb{C}$  ie il existe  $P \in GL_n(\mathbb{C})$  telle que  $PAP^{-1}$  est triangulaire supérieure.

### IV.2 Conséquences pratiques

#### Proposition 11

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les racines (complexes) de  $\chi_f$  non nécessairement distinctes.

1.  $\text{tr}(f) = \sum_{k=1}^n \lambda_k$
2.  $\det(f) = \prod_{k=1}^n \lambda_k$

Le même résultat vaut pour les matrices.

### IV.3 Deviner la dernière valeur propre