Devoir surveillé n°2

Durée : 4H. Calculatrices interdites. **Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction et la propreté : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.**

Lisez l'énoncé attentivement et en entier **AVANT** de commencer chaque exercice.

Exercice 1 (Questions de cours)

1. Donner, en précisant le domaine de convergence, les sommes de $\sum \frac{1}{n!}x^n$ et $\sum x^n$.
2. Tracer, dans le repère correspondant à l'équation, la conique d'équation $y^2 = 2x$. Placer également le foyer et la directrice.
3. Calculer sous forme factorisé le déterminant $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$ et préciser les valeurs de λ pour lesquelles il s'annule.

Exercice 2

On considère la conique $\mathcal{C}$ d'équation

$$\mathcal{C} : 4x^2 + y^2 = 1$$

1. Donner la nature de cette conique et tracer l'allure de $\mathcal{C}$. On prendra comme échelle 1 unité = 4cm (ou 4 grands carreaux).
2. Placer les foyers de $\mathcal{C}$ sur le schéma.
3. Démontrer qu'une paramétrisation de $\mathcal{C}$ est $\begin{cases} x = \frac{1}{2}\cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}, \theta \in \mathbb{R}$.
4. Déterminer une équation de T_A, la tangente à $\mathcal{C}$ au point $A : \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$. Tracer cette tangente sur le schéma de la question 1.
5. Trouver graphiquement exactement deux points B_1 et B_2 qui sont des points de $\mathcal{C}$ tels que la tangente en ces points est perpendiculaire à T_A. On placera B_1 et B_2 sur le schéma ainsi que les tangentes correspondantes.
6. Trouver les coordonnées de B_1 et B_2.

Exercice 3

Pour une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on note M^T sa transposée, $\mathrm{tr}(M)$ sa trace et $\det(M)$ son déterminant.

Un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sera dit stable par produit si pour toutes matrices M et N de F, le produit MN appartient à F.

Soient a, b, c trois réels. On note $M(a,b,c)$ la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}$ et $f_{a,b,c}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à $M(a,b,c)$, c'est à dire $f_{a,b,c} : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & M(a,b,c)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{cases}$.

On note E l'ensemble des matrices $M(a,b,c)$ et $\mathcal{E}$ l'ensemble des endomorphismes $f_{a,b,c}$, lorsque (a,b,c) parcourt $\mathbb{R}^3$.

On note finalement $I = M(1,0,0), J = M(0,1,0)$ et $K = M(0,0,1)$.

Partie I

On s'intéresse dans cette partie aux propriétés générales de E et $\mathcal{E}$ ainsi qu'à des éléments particuliers.

1. (a) Démontrer que E est un espace vectoriel dont on donnera une base et la dimension.
   (b) Donner une base d'un supplémentaire de E dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Dans cette question uniquement, on note $A = M(a,b,c)$ pour trois réels a, b, c. On suppose de plus que $AA^T = I_2$.
   (a) Montrer que $\det(A) = \pm 1$.
   (b) On suppose pour cette question que $a = 0$. Déterminer toutes les valeurs possibles de A en précisant à chaque fois la valeur du déterminant.
   (c) On suppose maintenant que $a \neq 0$. Montrer qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ telle que $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Préciser le déterminant de A ainsi qu'une interprétation géométrique de $f_{a,b,c}$ dans ce cas.

(d) Parmi les 4 matrices de la question 2b, quelles sont celles qui sont de la forme précédente ?

(e) Pour les deux matrices A telle que $AA^T = I_2$ et $\det(A) = -1$, montrer que $f_{a,b,c}$ est une symétrie et préciser ses éléments géométriques (par rapport à quel espace, dans quelle direction).

3. Soit p un projecteur de $\mathcal{E}$ distinct de l'identité et de l'application nulle. Il existe donc deux droites vectorielle distinctes D_1 et D_2 telles que p soit le projecteur sur D_1 parallèlement à D_2.

   (a) On note $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ une base adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^2 = D_1 \oplus D_2$. Donner $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$ et en déduire la trace et le déterminant de p.

   (b) En déduire quelles sont les matrices $M(a, b, c)$ pour lesquelles $f_{a,b,c}$ est un projecteur (distinct de l'identité et de l'application nulle).

   (c) Parmi les matrices précédentes, donner celles qui sont symétriques et préciser les éléments géométriques des projecteurs associés.

Partie II

On s'intéresse maintenant à la propriété de stabilité par produit introduite dans le préambule.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ pour que $M(a, b, c) \times M(d, e, f)$ appartienne à E. Exprimer ensuite cette condition comme la nullité d'un déterminant de taille 2.
2. E est-il stable par produit ?
3. L'objectif de cette question est de déterminer les droites vectorielles de E stables par produit.
   Soit Δ une droite vectorielle de E engendrée par $M_0 = M(a_0, b_0, c_0)$.

   (a) Démontrer que Δ est stable par produit si et seulement si $M_0^2 \in \Delta$.

   (b) On suppose que $M_0^2 \in \Delta$.

      i. Justifier qu'il existe un réel λ tel que $M_0^2 = \lambda M_0$.

      ii. Démontrer que si $\lambda = 0$, alors M est proportionnelle à J ou K.

      iii. On suppose que $\lambda \neq 0$. On pose $M_0' = \frac{1}{\lambda} M_0$. Démontrer que M_0' est la matrice canoniquement associée à un projecteur.

   (c) Conclure.

4. L'objectif de cette question est de déterminer les plans vectoriels que E stables par produit.

   (a) Vérifier que le plan vectoriel engendré par I et J est stable par produit.

   (b) Le plan vectoriel engendré par J et K est-il stable par produit ?

   (c) Vérifier que l'ensemble des matrices symétriques de E est un plan vectoriel stable par produit.

   (d) Soit $(b, c) \neq (0, 0)$. Démontrer que le sous espace vectoriel engendré par I et $bJ + cK$ est stable par produit.

   (e) Démontrer que les seuls plans vectoriels de E stables par produit sont ceux de la question précédente. On pourra utiliser la première question de cette partie.

Exercice 4
Partie I : des polynômes

Pour $n \in \mathbb{N}$ et k entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, on note

$$B_{n,k}(X) = \binom{n}{k} X^k (1 - X)^{n-k}$$

où $\binom{n}{k}$ désigne le coefficient binomial "k parmi n".

1. Pour n fixé, calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} B_{n,k}(X)$.
2. Développer les polynômes $B_{2,k}(X)$ pour $k \in [\![0, 2]\!]$.
3. Développer les polynômes $B_{3,k}(X)$ pour $k \in [\![0, 3]\!]$.
4. Démontrer que $(B_{2,k}(X))_{k \in [\![0,2]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
5. Démontrer que $(B_{n,k}(X))_{k \in [\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Partie II : une courbe paramétrée

Dans le reste du sujet, on se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

On note 4 points A_0, A_1, A_2 et A_3 de coordonnées respectives $(0,0), (2,2), (1,3), (1,-1)$. Ces points sont appelés points de contrôle de la courbe de Bézier définie par :

$$\forall t \in [0,1] \ \overrightarrow{OM(t)} = \sum_{k=0}^{3} B_{3,k}(t)\overrightarrow{OA_k}$$

On note Γ_1 cette courbe, qui est définie sur $[0,1]$.

On considère également Γ_2 dont une représentation paramétrique est

$$\begin{cases} x_2(t) = 6t - 9t^2 + 4t^3 \\ y_2(t) = 6t - 3t^2 - 4t^3 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

1. (a) Donner une représentation paramétrique de Γ_1.
   (b) Quelle remarque peut-on faire concernant les courbes Γ_1 et Γ_2 ?
2. Étude de Γ_2.
   (a) Construire les tableaux de variations de x_2 et y_2.
   (b) Déterminer les points réguliers de Γ_2 dont la tangente à Γ_2 est horizontale ou verticale.
   (c) Déterminer une équation cartésienne de la tangente à Γ_2 au point de paramètre $t = 0$.
   (d) Déterminer le point singulier de Γ_2. Préciser sa nature ainsi que la tangente à Γ_2 en ce point.
   (e) Donner la nature des branches infinies de Γ_2. Illustrer la réponse par un schéma sur la copie.
3. Tracer, dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, la courbe Γ_1, les points A_0, A_1, A_2 et A_3 ainsi que les tangentes à Γ_1 obtenues aux questions précédentes. Il est conseillé de prendre une unité de 6cm.
   Le tracé de Γ_2 n'est pas demandé.

Partie III : Quelques propriétés des courbes de Bézier.

On se place dans cette partie dans le cas général et on considère $n+1$ points $A_0, A_1, \dots, A_n$ et on note Γ la courbe paramétrée données par

$$\forall t \in [0,1] \ \overrightarrow{OM(t)} = \sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(t)\overrightarrow{OA_k}$$

Il s'agit de la courbe de Bézier dont les points de contrôle sont $A_0, A_1, \dots, A_n$.

1. Que peut-on dire des points de Γ de paramètre $t = 0$ et $t = 1$?
2. On suppose dans cette question que les points A_0 et A_1 sont distincts. Démontrer que la tangente à Γ en A_0 et la droite (A_0A_1) sont confondues.
   On admettra que si les points A_{n-1} et A_n sont distincts, alors la tangente à Γ en A_n et la droite $(A_{n-1}A_n)$ sont confondues.
   Indication : attention aux cas particuliers (valeurs de k particulières) en dérivant $B_{n,k}(t)$.
3. Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$. On considère la courbe Λ dont une représentation paramétrique est

$$\begin{cases} x(t) = P(t) \\ y_2(t) = Q(t) \end{cases}, t \in [0,1].$$

   Est-il possible de trouver $n+1$ points $A_0, \dots, A_n$ tels que Λ soit la courbe de Bézier associée aux points de contrôle $A_0, \dots, A_n$?

Partie IV : une deuxième courbe de Bézier

On reprend dans cette partie les points A_0 et A_3 de la partie II. On souhaite trouver une courbe de Bézier Γ_3 associée à trois points de contrôle $C_0 = A_0, C_1$ et $C_2 = A_3$ telle que les tangentes à Γ_1 et Γ_3 au point A_0 soient confondues ainsi que les tangentes à Γ_1 et Γ_3 au point A_3.

1. (a) En utilisant la partie III, calculer les coordonnées de C_1.
   (b) Vérifier qu'un paramétrage de Γ_3 est $\begin{cases} x_3(t) = 2t - t^2 \\ y_3(t) = 2t - 3t^2 \end{cases}, t \in [0,1]$
2. Faire l'étude (sans tracer) de la courbe Γ_3.
3. Compléter le schéma de la partie II en y ajoutant Γ_3, le point C_1 ainsi que toute information paraissant pertinente.