

Devoir maison n°8

A rendre le 29/11/2022

Exercice 1

On considère la série entière $\sum \frac{x^n}{n^2}$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de cette série.
2. Donner l'ensemble de définition de $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$ (il faut comprendre qu'on s'intéresse à la convergence en R et $-R$ de la série).
3. Donner une expression simple de $f'(x)$ pour $x \in]-1, 1[\setminus \{0\}$.
4. Calculer $f(-1)$ sachant que $f(1) = \frac{\pi^2}{6}$.
5. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g définie par la relation $g(x) = f(x) + f\left(-\frac{x}{1-x}\right)$.
6. Montrer que g est de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle à préciser et déterminer la fonction g' .
7. En déduire la valeur de $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

Indications

1. Plusieurs méthodes possible, on trouve $R = 1$
2. Deux études de convergence d'une série numérique.
3. Penser à multiplier ou diviser par x pour modifier les puissances.
4. Voir le DS 1 : l'idée est exprimer les sommes des termes d'indices pairs et impairs séparément pour faire un lien entre $f(1)$ et $f(-1)$.
- 5.
6. On précisera en plus l'intervalle de continuité de g .
7. On peut trouver une expression de $g(x)$ valable y compris aux bornes grâce à la continuité.