DM de l'avent

A rendre le 04/01/20203 et à chaque date indiquée en gras.

Exercice 1

1. jeudi 01/12 : Soit E un espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E et $x \in E$. Rappeler la définition de la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et donner un lien entre $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ (les coordonnées dans $\mathcal{B}$) et $X' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}$ (les coordonnées dans $\mathcal{B}'$.

   On donnera X en fonction de X' et X' en fonction de X.

2. 02/12 : Soient $(\alpha_n), (\beta_n), (\gamma_n)$ trois suites complexes. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{C}^3$ et on pose $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n = \lambda_1\alpha_n + \lambda_2\beta_n + \lambda_3\gamma_n$.

   Montrer que si $(\alpha_n), (\beta_n)$ et (γ_n) sont bornées alors (u_n) est bornée.

   Rappel : (α_n) est bornée se traduit par l'existence d'une constante (ie indépendante de n) $M_a \in \mathbb{R}^+$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}\ |\alpha_n| \leqslant M_a$.

3. 03/12 : Une histoire de rennes.

   Trois rennes notés A, B et C jouent à saute–renne [1] dans un grand champ. A saute par dessus B et se retrouve en position symétrique (par rapport à B). Puis B saute par dessus C et enfin C saute par dessus A (qui avait déjà bougé) et on recommence jusqu'à épuisement des joueurs.

   On repère les positions de nos rennes dans un repère orthonormé du plan par leurs affixes complexes. Au départ l'affixe de A est a_0, celle de B est b_0 et celle de C est c_0.

   (a) 03/12 : Calculer a_1, b_1 et c_1 les affixes respectives de A, B et C au bout d'une phase de jeu. On pourra introduire des affixes de vecteurs.

   (b) 04/12 : On pose $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$. Montrer que $X_n = M^n X_0$.

   (c) 05/12 : Montrer que, pour $\lambda \in \mathbb{C}$, $\chi_M(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 - 5\lambda + 1$.

   (d) **06/12** : Donner les valeurs propres de M. Que peut-on déjà en déduire ?

   (e) 07/12 : Déterminer une base de $E_1(M)$. On note $u \in \mathbb{C}^3$ le vecteur directeur de $E_1(M)$ qui a 1 comme première coordonnée.

   (f) 08/12 : On pose $\varepsilon = \pm 1$. D'après le cours, quelle est la dimension de $E_{-2+\varepsilon\sqrt{5}}(M)$? Quelle est la conséquence sur le système $MX = (-2 + \varepsilon\sqrt{5})X$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$?

   (g) 09/12 : Résoudre le système précédent et exhiber une base $\mathcal{B} = (u, v, w)$ constituée de vecteurs propres de M.

   (h) 10/12 : Donner une matrice diagonale D et une matrice inversible P telle que $M = PDP^{-1}$. On ne demande pas le calcul de P^{-1}.

   Exprimer ensuite M^n puis X_n en fonction de P, D, P^{-1}.

   (i) 11/12 : On pose $\begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix} = Y_n = P^{-1}X_n$ les coordonnées de X_n dans la base $\mathcal{B}$. Montrer que les 3 suites $(\alpha_n), (\beta_n)$ et (γ_n) sont géométriques de raisons à préciser.

   (j) 12/12 : Soit $q \in \mathbb{C}$. A quelle condition $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle bornée ?

   (k) **13/12** : Donner une condition nécessaire et suffisante sur α_0, β_0 et γ_0 pour que $(\alpha_n), (\beta_n)$ et (γ_n) soient 3 suites bornées.

   (l) 14/12 [2] : Montrer que $(a_n), (b_n), (c_n)$ sont toutes les trois bornées ssi $(\alpha_n), (\beta_n)$ et (γ_n) sont toutes les 3 bornées.

   (m) 15/12 : Montrer que nos 3 rennes restent dans une partie bornée du plan (ie. ne sortent pas de notre grand champ) ssi X_0 appartient à un certain plan vectoriel (sous espace de $\mathbb{C}^3$) dont on donnera une base ainsi qu'une équation cartésienne.

1. une variante du saute mouton classique
2. Question plus délicate. on se servira deux fois de la question du 02/12

Exercice 2

1. 16/12 : Interlude graphique. Pour $t \in \mathbb{R}$ on pose $r(t) = \exp(\cos(t)) - 2\cos(4t)$ et on considère la courbe paramétrée $\begin{cases} x(t) = r(t)\sin(t) \\ y(t) = r(t)\cos(t) \end{cases}$ Donner une période de r puis étudier les éventuelles symétries du support de cette courbe.
2. 17/12 : Poursuivons sur cette courbe. En python [3], créer les variables :
   — `T` la liste contenant les flottants équirépartis entre 0 et 2π, de longueur 250.
   — `R` la liste contenant les valeurs de r en tous les temps contenus dans `T`.
   — `X` la liste correspondante pour la fonction x puis `Y`.

   Il reste à utiliser `plt.plot(X, Y)` pour relier tous les points de notre support ainsi calculés et admirer le résultat de notre dur labeur.

Exercice 3

Un peu de probabilités. Soient X, Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifiant

$$\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \begin{cases} \frac{\lambda^i e^{-\lambda}\alpha^j(1-\alpha)^{i-j}}{j!(i-j)!} \text{ si } 0 \leqslant j \leqslant i \\ 0 \text{ si } 0 \leqslant i < j \end{cases}$$

où α et λ sont des constantes réelles vérifiant $0 < \alpha < 1$ et $\lambda > 0$.

1. 18/12 : Donner la loi de X
2. 19/12 : Donner la loi de Y
3. 20/12 : Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. 21/12 : On pose $Z = X - Y$. Déterminer la loi de Z.
5. 22/12 : Soient $j, n \in \mathbb{N}$. Calculer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(Y = j | Z = n)$.
6. 23/12 : Que peut-on en déduire pour les variables Y et Z ?
7. Samedi 24/12. On suppose que le nombre de cadeau reçu à Noël par une personne est une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre 5. On admet que la probabilité pour chaque cadeau d'être finalement inutilisé est égale à 1/4 et que les cadeaux successifs sont indépendants. Trouver la probabilité pour une personne de recevoir exactement i cadeaux dont j seront finalement inutilisés [4].

3. On pourra avantageusement utiliser numpy
4. et revendus ou entreposés dans un coin...

Indications

Exercice 1

1. Question de cours
2. Attention à la rédaction du raisonnement.
3. (a) La réponse est presque donnée à la question suivante.
   (b) La récurrence est facultative.
   (c)
   (d)
   (e)
   (f)
   (g)
   (h)
   (i) Trouver une relation entre Y_{n+1} et Y_n.
   (j) (u_n) est bornée ssi $(|u_n|)$ est bornée.
   (k)
   (l) Deux implications ici.
   (m)

Exercice 2

Exercice 3

1. Nous connaissons la loi conjointe, il s'agit de retrouver celle de X par somme : on travaille à i fixé. On doit trouver une loi de Poisson
2. Même démarche, même type de loi (mais pas le même paramètre).
3. Pour prouver que oui, constater que le produit donne bien la loi conjointe, pour prouver que non trouver un contre-exemple.
4. Trouver d'abord toutes les valeurs possibles, puis pour un k fixé, écrire $(Z = k)$ comme réunion disjointes d'événements portant sur X et Y.
5. Revenir à la définition.
6. Indépendance ?
7. remarquer qu'avec nos notations, $X = Z + Y$ avec Z et Y indépendantes.