Elements propres

Exercice 1
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que si λ est valeur propre de f alors λ^k est valeur propre de f^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que f est inversible (bijective) si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de f. Dans ce cas, déterminer les valeurs propres de f^{-1} en fonction de celles de f.
3. Si f est nilpotent (il existe un entier $p > 0$ tel que $f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$), montrer que la seule valeur propre de f est 0.

Exercice 2 (Cours)
Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Déterminer les éléments propres d'un projecteur de E et de la symétrie associée.

Exercice 3
Soient $f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto & XP' \end{array} \right.$ et $\varphi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f'' \end{array} \right.$. Déterminer les éléments propres de f et φ (valeurs propres, espaces propres associés)

Exercice 4
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^p = I_n$ pour un $p \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Déterminer les valeurs propres possibles de A.

Exercice 5

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si A n'est pas une homothétie et si A n'admet qu'une seule valeur propre, montrer que A n'est pas diagonalisable.
2. Dire si les matrices suivantes sont diagonalisables :
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
3. Un endomorphisme nilpotent est-il diagonalisable ?

Exercice 6
Déterminer les coefficients inconnus de la matrice suivante
$$A = \begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 2 & b' & c' \\ 3 & b'' & c'' \end{pmatrix}$$
pour qu'elle admette pour vecteurs propres $(1,0,1)$, $(-1,1,0)$ et $(0,1,-1)$. Quelles sont alors les valeurs propres ?

Exercice 7
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que A et A^T ont les mêmes valeurs propres.

Exercice 8 ($\star$)
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$. On suppose de plus que A possède n valeurs propres distinctes (et donc...). Montrer que B est diagonalisable via la même base.

Diagonalisabilité

Exercice 9
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est de dimension finie. On suppose que f est diagonalisable et que $Sp(f) = \{0,1\}$. Montrer que f est un projecteur.

Enoncer un résultat similaire pour les symétries.

Exercice 10
Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables sur $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{C}$? Si oui, déterminer une base de vecteurs propres.
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$
$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11
Pour $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ on pose $A_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & \frac{n+2}{n} & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & 1 \end{pmatrix}$

1. Sans calculer de polynôme caractéristique, montrer que 1 et $1 + \frac{1}{n}$ sont valeurs propres de A_n.
2. La matrice A_n est-elle diagonalisable ? Inversible ?
3. On note $B_n = A_1 A_2 \dots A_n$. La matrice B_n est-elle diagonalisable ? Inversible ? Si oui, exhiber B_n^{-1}.

Exercice 12
On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par
$$\begin{cases} u_0 = u_1 = u_2 = 1 \\ u_{n+3} = 20u_n - 24u_{n+1} + 9u_{n+2} \end{cases}$$
Exprimer u_n en fonction de n.

Exercice 13

1. Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

2. Résoudre l'équation $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$. On commencera par donner des solutions [1] puis vérifier que ce sont les seules [2].

Exercice 14

Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n complexes vérifiant $A = B^2$; les assertions suivantes sont-elles vraies ?

Indication : on pensera aux endomorphismes/matrices dont on sait s'il sont diagonalisable ou pas : projecteur, symétrie, nilpotent.

1. Si B est diagonalisable, A l'est aussi.
2. Si A est diagonale, B l'est aussi.
3. Si A est diagonalisable, B l'est aussi.
4. Si $A = \lambda \, \mathrm{id}$ avec $\lambda \neq 0$ alors B est diagonalisable.
5. ($\star$) Si A est diagonalisable et inversible, B est diagonalisable.

Approfondissement

Exercice 15

A quelles conditions portant sur α, β, la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ \alpha & 0 & \beta \\ \alpha & \beta & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 16

On considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$ où $a_{i,j} = \frac{i}{j}$. Montrer que A est diagonalisable. Indication : calculer le rang de A.

Exercice 17

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ et $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ P & \mapsto & (X-1)(X-2)P' - 2XP \end{array} \right.$.

1. Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.
2. Montrer que si $P \in E$ est vecteur propre de φ alors $\deg(P) = 2$.
3. Déterminer les éléments propres de φ.

1. Plutôt facile
2. Plus difficile

Exercice 18 (Important)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$. On note $P(f) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k f^k$ (attention à la puissance 0).

Montrer que si $\lambda \in Sp(f)$ et $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ alors $P(\lambda) = 0_{\mathbb{K}}$. Trouver dans les exercices précédents 2 exemples de ce résultat

Exercice 19

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

1. Calculer A^3 et en déduire les valeurs propres possible de A.
2. Donner les espaces propres de A.
3. Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $M = \begin{pmatrix} c & b & a \\ a & c & b \\ b & a & c \end{pmatrix}$. Diagonaliser M.

Exercice 20

Soit $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$. Pour $P \in E = \mathbb{R}_n[X]$, on pose $f(P) = X(1-X)P' + nXP$

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$.
2. Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de f en résolvant une équation différentielle.
3. f est-elle diagonalisable ?