I Les notions fondamentales

Il s'agit ici des notions de base, qui soutiennent tout le chapitre.

— Chapitre sur les séries numériques : preuve de convergence et de convergence absolue.
— Série entière : domaine de convergence, fonction somme. Bien identifier la forme générale.
— Rayon de convergence : définition, interprétation en terme de domaine de convergence (en lien avec le schéma coloré)
— Développements en série entières : connaître les développements usuels (avec leurs domaine de validité respectifs)

II Les savoirs faire

Il s'agit ici des techniques de bases sans lesquelles vous ne pourrez utiliser ce chapitre.

— Calcul du rayon de convergence : par la règle $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ si elle s'applique, par la règle de d'Alembert sur les séries numériques. Comparaison des rayons (équivalence, inégalités sur les modules des coefficients, petit et grand o).
— Dériver ou intégrer terme à terme (sur l'intervalle ouvert, dans tous les cas) pour obtenir de nouveaux DSE ou de nouvelles sommes de séries (exemple fondamental : $\sum nx^n$ ou $\sum nx^{n-1}$).
— Manipuler les sommes de séries convergentes : somme, différence, changement d'indice, ajouter ou retirer des termes avant de sommer, multiplier ou diviser par x (attention au cas $x = 0$) pour adapter les puissances.
— Reconnaître un développement usuel pour calculer une somme de série.
— Utiliser l'exponentielle complexe en lien avec la trigonométrie.
— Adapter les méthode d'obtention de développements limités en 0 pour obtenir des DSE, et trouver les domaines de convergence correspondant (après changement de variable).

III Les pièges classiques

Une sélection choisie mais non exhaustive des erreurs classiques

— Confondre la série ($\sum a_n x^n$, dont on étudie le domaine de convergence) et sa somme ($\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, valable seulement pour des x bien choisis).
— Sommer les relation de comparaison ou comparer les sommes au lieu de comparer les coefficients.
— Confondre les DSE usuels.
— Oublier de vérifier que $a_n \neq 0$ avant d'utiliser d'Alembert.
— Oublier le module/valeur absolue dans l'utilisation de d'Alembert (ce qui conduit parfois à des limites négatives !)

IV Pour aller plus loin

Une fois les points précédents acquis, nous pouvons nous diriger vers des questions type concours.

— Utiliser l'unicité des coefficients (une série entière nulle sur un intervalle non vide et non réduit à un point à tous ses coefficients nuls).
— Calculer le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ en identifiant les valeurs de x pour lesquelles la série converge ($R \geqslant \dots$) et les valeurs pour lesquelles la séries diverge ($R \leqslant \dots$). Lien avec la règle de d'Alembert sur les séries numériques.
— Produit de Cauchy de deux séries entières. Voir l'exponentielle (colle sur les séries numériques) et l'exemple du cours.
— Chercher les solutions DSE d'un problème (souvent une équation différentielle) : établir une relation de récurrence sur les coefficients, résoudre, puis vérifier que le rayon de convergence obtenu est non nul.