Limites de fonctions

Antoine Louatron

Table des matières

Notations On notera tout le long du chapitre I un intervalle quelconque de I non vide et non réduit à un point.

Alors on pose $\overline{I}$ l'intervalle de $\overline{\mathbb{R}}$ qui est $I\cup$ ses bornes et $\mathring{I}$ l'intervalle I privé de ses bornes (c'est ce que l'on appelle l'intérieur de I).

$\overline{I}$ est toujours un intervalle fermé et $\mathring{I}$ est toujours un intervalle ouvert.

I Limites

I.1 Limite d'une fonction

I.1.1 Définition

Soit $a \in \overline{I}$. Un voisinage de a dans I est

— *un intervalle centré en a si $a \in \mathbb{R}$, c'est à dire un intervalle de la forme $I \cap [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$*

— *un intervalle de la forme $I \cap [c, +\infty[$ si $a = +\infty$.*

— *un intervalle de la forme $I \cap]-\infty, c]$ si $a- = \infty$.*

On dira qu'une propriété est vraie au voisinage de a si elle est vraie pour un voisinage de a.

Par exemple $\sin$ *est croissante au voisinage de* 0*, mais on ne peut rien dire de tel sur* $\cos$.

I.1.2 M-Remarque

Le voisinage est à un point de I ce que "à partir d'un certain rang" est à une limite de suite.

Plus explicitement si une propriété est vraie pour tout $x \in I \cap [a-\alpha, a+\alpha]$, alors pour tout $0 < \beta < \alpha$ la propriété est vraie pour $x \in I \cap [a-\beta, a+\beta]$. (on peut réduire le voisinage considéré, tout comme on pouvait "aller encore plus loin")

I.1.3 Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \overline{I}$ et $l \in \overline{R}$..

1. *Limite en un point : $a \in \mathbb{R}$*
   (a) *si $l \in \mathbb{R}$ on dit que f admet l pour limite en a si*
   $$\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha > 0 \forall x \in I \ |x-a| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon.$$
   (b) i. *on dit que f admet $-\infty$ pour limite en a si $\forall A \in \mathbb{R}_- \exists \alpha > 0 \forall x \in I \ |x-a| \leqslant \alpha \Rightarrow f(x) \leqslant A$.*
   ii. *on dit que f admet $+\infty$ pour limite en a si $\forall A \in \mathbb{R}_+ \exists \alpha > 0 \forall x \in I \ |x-a| \leqslant \alpha \Rightarrow f(x) \geqslant A$.*
2. *Limite en l'infini*
   (a) *Si $a = +\infty$*
   i. *si $l \in \mathbb{R}$, on dit que f admet l pour limite en $+\infty$ si*
   $$\forall \varepsilon > 0 \exists B \in \mathbb{R}_+ \forall x \in I \ x \geqslant B \Rightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon.$$
   ii. *on dit que f admet $+\infty$ comme limite en $+\infty$ si $\forall A \in \mathbb{R}_+ \exists B \in \mathbb{R}^+ \forall x \in I \ x \geqslant B \Rightarrow f(x) \geqslant A$.*
   iii. *on dit que f admet $-\infty$ comme limite en $+\infty$ si $\forall A \in \mathbb{R}_- \exists B \in \mathbb{R}^+ \forall x \in I \ x \geqslant B \Rightarrow f(x) \leqslant A$.*
   (b) *Si $a = -\infty$*
   i. *si $l \in \mathbb{R}$, on dit que f admet l pour limite en $-\infty$ si*
   $$\forall \varepsilon > 0 \exists B \in \mathbb{R}_- \forall x \in I \ x \leqslant B \Rightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon.$$
   ii. *on dit que f admet $+\infty$ comme limite en $-\infty$ si $\forall A \in \mathbb{R}_+ \exists B \in \mathbb{R}^- \forall x \in I \ x \leqslant B \Rightarrow f(x) \geqslant A$.*
   iii. *on dit que f admet $-\infty$ comme limite en $-\infty$ si $\forall A \in \mathbb{R}_- \exists B \in \mathbb{R}^- \forall x \in I \ x \leqslant B \Rightarrow f(x) \leqslant A$.*

Si l est la limite de f en a on note souvent $f(x) \underset{x\to a}{\to} l$ ou $f \underset{a}{\to} l$.

I.1.4 Reformulation

On peut reformuler la définition de limite comme suit : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \overline{I}$ et $l \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f admet l pour limite en a si

pour tout voisinage V_l de l il existe un voisinage V_a de a tel que$\forall x \in V_a \cap I \ f(x) \in V_l$.

I.1.5 Théorème
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \overline{I}$. Si f admet une limite finie en a alors f est bornée au voisinage de a.

Preuve.
On traite le cas où $a \in \mathbb{R}$. Les cas infinis se traitent de manière tout à fait similaire. On note $l \in \mathbb{R}$ la fameuse limite finie. Soit $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in I\ |x-a| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x)-l| \leqslant 1$. ($x \in V_a$) D'après l'inégalité triangulaire, $\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[\cap I\ ||f(x)|-|l|| \leqslant 1$ et en particulier $|f(x)| \leqslant |l|+1$. (vrai pour $x \in V_a \cap I$). Donc f est bornée au voisinage de a. ∎

Explication Faire le parallèle avec "toute suite convergent est bornée".

I.1.6 Remarque

1. Attention, la réciproque est fausse : cf II.2.7 où la fonction est bornée sur $\mathbb{R}$ mais n'a pas de limite en 0.
2. Si f admet une limite $\pm\infty$ en a alors f est non bornée au voisinage de a.

I.1.7 Théorème (Unicité de la limite)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \overline{I}$.

1. *Si f admet une limite en a alors celle-ci est unique. On la note $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ou encore $\lim\limits_{a} f$.*
2. *Si $a \in I$ et que f admet une limite en a alors $\lim\limits_{a} f = f(a)$.*

Preuve.

1. Soient $l, l' \in \overline{\mathbb{R}}$ deux limites distinctes de f en a. Comme $l \neq l'$, il existe deux voisinages V_l et $V_{l'}$ de l et l' respectivement tels que $V_l \cap V_{l'} = \emptyset$. On a maintenant par définition de la limite deux voisinages de a notés V_a et V_a' tels que
$$\forall x \in V_a \cap I\ f(x) \in V_l \text{ et } \forall x \in V_a' \cap I\ f(x) \in V_{l'}.$$
Finalement $V_a \cap V_a' \cap I$ est un intervalle non vide (soit centré en a, soit d'extrémité a). Soit x dans cet intervalle. Alors $f(x) \in V_l \cap V_{l'}$. Contradiction.
2. Montrons d'abord que $l \neq +\infty$. Si c'était le cas, il existerait un voisinage V_a de a tel que $\forall x \in V_a \cap I\ f(x) \in]f(a), +\infty[$. En particulier $a \in I$ et $a \in V_a$ donc $f(a) > f(a)$. Contradiction. Une démonstration tout à fait similaire montre que $l \neq -\infty$.
Soit maintenant $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in I\ |x-a| < \alpha \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon$. Comme $a \in I$, on a alors $|f(a)-l| \leqslant \varepsilon$. Un lemme du chapitre sur les suites conclut. ∎

I.1.8 Exemple
On pose $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Alors $\lim_{+\infty} f = 0$ et $\lim_0 f = +\infty$.
En effet soit $\varepsilon > 0$. Comme f est décroissante, $\forall x > \frac{1}{\varepsilon}\ f(x) < \varepsilon$.
Si maintenant $A \in \mathbb{R}^+$ alors $\forall x \in]0, \frac{1}{A}]\ f(x) \geqslant A$.

I.1.9 Corollaire
Les coefficients d'un DL sont uniques. Plus précisément, pour toute fonction qui admet un DL_n en a, les coefficients de ce DL sont uniques.

Preuve.
Pour $n = 0$, le DL s'écrit $f(x) = a_0 + o_a(1)$, c'est à dire $a_0 = \lim_a f = f(a)$, dont on vient de prouver l'unicité.
On suppose l'unicité pour tous les Dl à l'ordre n et on la prouve pour les DL à l'ordre $n+1$. Supposons $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n+1} a_k(x-a)^k + o_a((x-a)^{n+1}) = \sum\limits_{k=0}^{n+1} b_k(x-a)^k + o_a((x-a)^{n+1})$. Alors d'après l'initialisation $a_0 = b_0 = f(a)$. Les a_i et les b_i sont donc les coefficients du DL à l'ordre n de $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ et sont donc égaux deux à deux.
Finalement, par récurrence les coefficients d'un DL sont uniques. ∎

I.1.10 Exemple
Rappeler le DL à l'ordre 3 en 0 de sin. En déduire celui d'arcsin.

I.2 Caractérisations

I.2.1 Proposition
Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}, l \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. *Si* $a \in \mathbb{R}$ *alors* $\lim\limits_a f = l \iff \lim\limits_{h\to 0} f(a+h) = l$.
2. *Si* $l \in \mathbb{R}$ *alors* $\lim\limits_a f = l \iff \lim\limits_{x\to a} f(x) - l = 0 \iff \lim\limits_{x\to a} |f(x) - l| = 0$.

Preuve.

1. On a en effet $|x-a| = |h-0|$ (avec les notations de la définition).
2. Il suffit de reprendre encore une fois la définition. ∎

I.2.2 Remarque

En particulier, une fonction tend vers 0 en a ssi sa valeur absolue le fait. Il est souvent pratique de travailler avec les valeurs absolues qui sont positives et donc plus facile à manier dans les inégalités.

I.3 Propriétés des fonctions possédant des limites

I.3.1 Proposition (Inégalités strictes)
Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$, $l, l' \in \mathbb{R}$ *et* $m, M \in \mathbb{R}$. *Supposons en outre que* $\lim\limits_a f = l$ *et* $\lim\limits_a g = l'$

1. *Si* $l < l'$ *alors* $f < g$ *au voisinage de* a
2. *Si* $l < M$ *alors* $f < M$ *au voisinage de* a.
3. *Si* $l > m$ *alors* $f > m$ *au voisinage de* a.

Preuve.
On traite seulement le premier cas. Les deux autres en sont des conséquences directes.

On suppose donc $l < l'$, c'est à dire $l' - l > 0$. Soit $\varepsilon = \frac{l'-l}{2} > 0$. On applique les définitions de convergence avec ce ε :

— 1er cas : $a \in \mathbb{R}$. On obtient α_1 et $\alpha_2 > 0$ tels que :

$$\forall x \in I \ |x-a| < \alpha_1 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \text{ et } \forall x \in I \ |x-a| < \alpha_2 \Rightarrow |g(x) - l'| < \varepsilon$$

Soit maintenant $x \in I$ dans ces deux voisinages (dans le plus petit des deux). On a $f(x)-g(x) = f(x)-l-(g(x)-l')-l'+l$. En traduisant les inégalités sur les valeurs absolues, on obtient $f(x)-l < \varepsilon$ et $g(x)-l' < \varepsilon$ ie $f(x) - g(x) < 2\varepsilon - l' + l = 0$. CQFD.

— Si $a = +\infty$.
On obtient $B_1, B_2 \in \mathbb{R}^+$ tels que

$$\forall x \in I \ x \geqslant B_1 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \text{ et } \forall x \in I \ x \geqslant B_2 \Rightarrow |g(x) - l'| < \varepsilon$$

Il ne reste plus qu'à prendre $x \geqslant \max(B_1, B_2)$ et dans I pour conclure exactement de la même manière.

— Si $a = -\infty$. Preuve tout à fait similaire. ∎

Explication Dessin avec 0.

I.3.2 Remarque

Si f admet une limite strictement positive en a (par exemple parce qu'elle y est continue et $f(a) > 0$), alors il existe un voisinage de a sur lequel f est strictement positive. Très pratique pour définir des quotients.

I.3.3 Théorème (Passage à la limite des inégalités larges)
Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$, $l, l' \in \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$, $m, M \in \mathbb{R}$.

1. *Si* $\lim\limits_a f = l$ *et* $\lim\limits_a g = l'$ *et que* $f(x) \leqslant g(x)$ *au voisinage de* a *alors* $l \leqslant l'$.
2. *Si* $\lim\limits_a f = l$ *et que* f *est majoré par* M *au voisinage de* a *alors* $l \leqslant M$.
3. *Si* $\lim\limits_a f = l$ *et* $f(x) \geqslant m$ *au voisinage de* a *alors* $l \geqslant m$.

Preuve.
Les points 2 et 3 sont de simples applications de 1 à des fonctions constantes. La démonstration ressemble à s'y méprendre à celle pour les suites. Allons-y !
Si on avait $l < l'$, alors d'après le résultat précédent, $f < g$ au voisinage de a, contradiction. ∎

II Théorèmes d'existence

II.1 Théorème des gendarmes

II.1.1 Théorème (Encadrement)
Soient $f, g, h : I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$.

1. *Théorème des gendarmes : Si au voisinage de* a *on a* $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ *et que* $\lim\limits_a g = l$ *et* $\lim\limits_a h = l \in \overline{\mathbb{R}}$ *alors* f *admet une limite en* a *et cette limite vaut* l.
2. *Minoration : Si* $\lim\limits_a g = +\infty$ *et que* $g(x) \leqslant f(x)$ *au voisinage de* a *alors* f *admet une limite en* a *et* $\lim\limits_a f = +\infty$.
3. *Majoration : Si* $\lim\limits_a h = -\infty$ *et que* $f(x) \leqslant h(x)$ *au voisinage de* a *alors* f *admet une limite en* a *et* $\lim\limits_a f = -\infty$.

Preuve.
1. Soit $V_a^{(1)}$ un voisinage de a tel que $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$. Soit $\varepsilon > 0$.
   Comme h et g admettent l pour limite en a, posons $V_a^{(2)}$ et $V_a^{(3)}$ des voisinages de a tels que
   $$\forall x \in I \ x \in V_a^{(2)} \Rightarrow |g(x) - l| \leqslant \varepsilon \text{ et } \forall x \in I \ x \in V_a^{(3)} \Rightarrow |h(x) - l| \leqslant \varepsilon.$$
   On pose maintenant $V_a = V_a^{(1)} \cap V_a^{(2)} \cap V_a^{(3)}$. C'est un voisinage de a et on a pour $x \in I \cap V_a$
   $$l - \varepsilon \leqslant g(x) - l \leqslant f(x) - l \leqslant h(x) - l \leqslant l + \varepsilon.$$
   Ainsi sur ce voisinage $|f(x) - l| \leqslant \varepsilon$ et donc f admet l pour limite en a.
2. Soit $A \in \mathbb{R}$. Soit $V_a^{(1)}$ un voisinage de a sur lequel $g(x) \leqslant f(x)$.
   Soit maintenant $V_a^{(2)}$ un voisinage de a sur lequel $g(x) \geqslant A$. un tel voisinage existe car $g \to +\infty$. Sur l'intersection de ces voisinages, qui est encore un voisinage on a $f(x) \geqslant A$ et donc $f \underset{a}{\to} +\infty$.
3. Preuve similaire. ∎

II.1.2 Corollaire
Soit $f, \varepsilon : I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$.

1. *Si* $|f(x)| \leqslant \varepsilon(x)$ *au voisinage de* a *et* $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$ *alors* $\lim_a f = 0$.
2. *Si* f *est bornée au voisinage de* a *et que* $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$ *alors* $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) f(x) = 0$.

Preuve.
Exo. ∎

II.2 Opérations

II.2.1 Théorème
Les limites de fonctions se comportent comme les limites de suites pour les opérations $+, .$, *opposé, inverse. Plus précisément les limites suivantes existent :*

$\lim_a f$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_a g$	$l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_a f+g$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$-\infty$

$\lim_a f$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}^*$	$l \in \mathbb{R}^*$	$l = 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_a g$	$l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_a fg$	ll'	$sg(l)\infty$	$-sg(l)\infty$	FI	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

$\lim_a f$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \overline{\mathbb{R}}^*$	$l \in \overline{\mathbb{R}}^*$	0	$\pm\infty$
$\lim_a g$	$l' \in \mathbb{R}^*$	$\pm\infty$	0^+	0^-	0	$\pm\infty$
$\lim_a \frac{f}{g}$	$\frac{l}{l'}$	0	$sg(l)\infty$	$-sg(l)\infty$	FI	FI

Attention, si on ne connaît pas le signe de g *et que* $g \to 0$ *alors on ne sait pas calculer la limite du quotient.*

Preuve.
Les preuves sont tout à fait similaire au cas des suites. ■

Explication Redonner les FI, la méthode de preuve.

II.2.2 Proposition (Composée (ou changement de variable))
Soient $f : I \to J$ *et* $g : J \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}, b \in \overline{J}, c \in \overline{R}$.

$$\lim_a f = b \text{ et } \lim_b g = c \Rightarrow \lim_{x \to a} g(f(x)) = c.$$

Preuve.
Il faut bien comprendre que le résultat principal est l'existence d'une limite pour $g \circ f$.
Comme d'habitude on pourrait faire un raisonnement par voisinages pour traiter tous les cas. On se contente de traiter le cas où tous les nombres sont réels. Soit $\varepsilon > 0$. Soit alors α_b tel que $\forall x \in J\ |x-b| \leqslant \alpha_b \Rightarrow |g(x)-c| \leqslant \varepsilon$. Mais comme $\lim_a f = b$, il existe α_a tel que $\forall x \in I\ |x-a| \leqslant \alpha_a \Rightarrow |f(x)-b| \leqslant \alpha_b$. Si maintenant $x \in I$ et $|x-a| \leqslant \alpha_a$ alors $f(x) \in J \cap]b-\alpha_b, b+\alpha_b[$ donc $g(f(x)) \in]c-\varepsilon, c+\varepsilon[$. CQFD. ■

Explication On dit changement de variable car si on pose $y = f(x)$ on calcule en fait la limite de $f(y)$.

II.2.3 Remarque

Attention la forme $1^{+\infty}$ est indéterminée, exemple : $(1+\frac{1}{x})^x \underset{+\infty}{\to} e$ et $(1+\frac{1}{x})^{x^2} \to +\infty$.

II.2.4 Exemple
Calculer $\lim\limits_{+\infty} \ln \frac{e^{-2x}+1}{(e^{-x}+1)^2}$.

II.2.5 Rappels

On peut également calculer un DL à l'ordre 0 ou un équivalent pour calculer des limites...

II.2.6 Théorème
Soient $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$, $l \in \overline{\mathbb{R}}$. *Soit* $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *telle que* $u_n \underset{+\infty}{\to} a$.
Si f *admet* l *pour limite en* a *alors la suite* $(f(u_n))$ *admet* l *pour limite en* $+\infty$.

Preuve.
$\Rightarrow$. Soit $(u_n)_n$ une suite d'éléments de I convergeant vers a.

On suppose $a, l \in \mathbb{R}$. Remplacer les voisinages pour démontrer les autres cas. Soit $\varepsilon > 0$ et $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in I |x-a| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x)-l| \leqslant \varepsilon$.

Comme $\lim_{+\infty} u_n = a$, il existe un rang que l'on note n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0$ $|u_n - a| \leqslant \alpha$. A partir de ce rang on a donc $|f(u_n) - l|\varepsilon$, et donc la suite $(f(u_n))_n$ converge vers l. ∎

II.2.7 Exemple
La fonction $f : x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ (sur $\mathbb{R}_+^*$) n'a pas de limite en 0. Poser $u_n = \frac{1}{\pi n}$ et $v_n = \frac{1}{\pi n + \frac{\pi}{2}}$.

La même chose vaut pour sin en $+\infty$.

II.2.8 Méthode

Pour prouver qu'une fonction n'admet par de limite on utilise ce théorème (on trouve deux suites cv vers a mais dont les images n'ont pas la même limite) ou on revient à la définition (plus pénible)

II.3 Limites directionnelles

II.3.1 Définition
Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \mathring{I}$ et $l \in \overline{\mathbb{R}}$.

On dit que f admet l pour limite à gauche (resp à droite) en a si $f_{|I \cap]-\infty, a[}$ (resp $f_{|I \cap]a, +\infty[}$) admet l pour limite en a. En tant que limite, il y a unicité de la limite à gauche et à droite qui est notée $\lim\limits_{a^-} f$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x)$ (resp $\lim\limits_{a^+} f$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x)$).

II.3.2 Exemple
Réécriture de la définition "espilonesque" pour la limite à gauche. $l \in \mathbb{R}$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha^- > 0 \forall x \in I \ a - \alpha^- < x < a \Rightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon.$$

II.3.3 M-Remarque

Si a est la borne inférieure de I, alors les concepts de limites à droite en a et de limite en a sont les mêmes. Ces définitions ne sont "intéressantes" (au sens, nouvelles) que dans le cas d'un point à l'intérieur de I

II.3.4 Théorème (Caractérisation d'une limite finie)
Soient $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \mathring{I}, l \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors

$$\lim_a f = l \iff l = f(a) \text{ et } \lim_{a^-} f = \lim_{a^+} f = l.$$

Preuve.
- $\Rightarrow$ est évident d'après le théorème sur l'unicité de la limite et les définitions.
- $\Leftarrow$.

  Supposons donc $l = f(a)$ et $\lim_{a^-} f = \lim_{a^+} f = l$. En particulier $l \in \mathbb{R}$. Soit donc $\varepsilon > 0$. Soient α^+ et α^-t tels que

  $$\forall x \in I \ a - \alpha^- < x < a \Rightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon \text{ et } \forall x \in I \ a < x < a + \alpha^+ \Rightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon.$$

  Soit maintenant $\alpha = \min(\alpha^+, \alpha^-)$ et $x \in]a - \alpha, a + \alpha[$. Il y a trois cas
  1. $x < a$. Alors dans ce cas $x \in]a - \alpha, a[\subset]a - \alpha^-, a[$ et donc $|f(x) - l| \leqslant \varepsilon$.
  2. $x = a$ et alors $|f(x) - l| = |f(a) - f(a)| = 0 \leqslant \varepsilon$.
  3. $x > a$. Alors dans ce cas $x \in]a, a + \alpha[\subset]a, a + \alpha^+[$ et donc $|f(x) - l| \leqslant \varepsilon$.

  Dans tous les cas $|f(x) - l|\varepsilon$ et donc $f \underset{a}{\to} l$. ∎

II.3.5 Exemple
On considère la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} e^x & \text{si } x \geqslant 0 \\ 1 - x \text{ si } x < 0 \end{cases} \end{array} \right.$. Montrons que $\lim_0 f = 1$.

On sait que $\lim_{0^-} 1 - x = 1$ (preuve : prendre $\alpha = \varepsilon$) et que $\lim_{0^+} e^x = 1$ (admis). De plus $f(0) = 1$. Le théorème précédent conclut.

II.3.6 Exemple
La fonction partie entière n'a pas de limite en 0.

II.3.7 Définition
Soit $f : I\backslash\{a\} \to \mathbb{R}$. On dit que f admet une limite en a si f admet une limite à droite et à gauche en a et que ces limites sont égales.

II.3.8 Exemple
$\frac{1}{x^2} \underset{0}{\to} +\infty$.

Par contre, on ne peut pas définir la limite de $\frac{1}{x}$ en 0.

II.4 Lien avec la monotonie

II.4.1 Théorème (Convergence monotone)
Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction croissante. L'intervalle de départ de f étant infini et de bornes finies ou non.

1. *$\lim\limits_{b} f$ existe. Elle vaut $\sup(f(I)) = \sup(\mathrm{Im}(f))$ quand f est majorée et $+\infty$ sinon.*
2. *$\lim\limits_{a} f$ existe. Elle vaut $\inf(f(I))$ quand f est minorée et $-\infty$ sinon.*

Si on suppose plutôt f décroissante, le théorème reste vrai en échangeant les bornes supérieures et inférieures.

Preuve.
On va prouve seulement le premier point. Le second se prouve de façon tout à fait similaire.

On pose $F = \mathrm{Im}(f) = \{f(x) | \ x \in I\}$. Alors F est non vide car I est non vide. Deux cas se présentent : F est majoré ou non.

— Si F est majoré on pose $l = \sup F = \sup f$. On va montrer que $f \underset{a}{\to} l$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors par caractérisation de la borne sup il existe un élément $y \in F$ tel que $y > l - \varepsilon$ et par définition de F, y peut s'écrire $f(x_0)$. On a donc $f(x_0) > l - \varepsilon$. Si maintenant $x \in [x_0, a[$ alors $f(x) \geqslant f(x_0)$ et donc $f(x) \geqslant f(x_0) > l - \varepsilon$. Mais comme $f(x) \in F$ on a aussi $f(x) \leqslant l < l + \varepsilon$. et finalement $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$. On a donc trouvé un voisinage de a sur lequel $f(x)$ est proche de l à moins de ε. C'est à dire que $f(x) \underset{x \to a}{\to} l$.

— Si F n'est pas majoré, montrons que $f \underset{a}{\to} +\infty$.

Soit $A \in \mathbb{R}^+$. Montrons qu'il existe un voisinage de a tel que $f(x) \geqslant A$ pour tout x dans ce voisinage. On sait que A n'est pas un majorant de f et donc $\exists x_0 \in I \ f(x_0) \geqslant A$. Mais maintenant par croissance de f, $\forall x \in [x_0, a[\ f(x) \geqslant A$. CQFD. ∎

II.4.2 Remarque

1. Comme pour une suite, une fonction monotone se comporte "bien" vis-à-vis de la limite. En particulier une fonction monotone admet toujours une limite (finie ou infinie) aux bornes ouvertes de son intervalle de définition.
2. On peut bien sûr adapter ce théorème à une fonction décroissante. L'énoncer.

II.4.3 Cas des intervalles fermés

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est monotone, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ existe, mais pas forcément $\lim_a f$. Pour cela il faut que $f(a) = \lim_{a^+} f$. De même en b.

II.4.4 Exemple
Montrons (enfin !) que $\ln(x) \underset{x \to +\infty}{\to} +\infty$. Premièrement, par définition, ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et de dérivée strictement positive. Ainsi ln est strictement croissante et admet donc des limites en 0 et en $+\infty$ d'après le théorème précédent.

Notons $l = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x)$, $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Par composition, $\ln(2^n) \to l$ (en tant que suite, et car $2^n \to +\infty$). De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln(2^n) = n \ln(2)$ (pouvez-vous le re-prouver ?) qui est une suite arthétique de raison $\ln(2) > 0$ car $2 > 1$ et $\ln(1) = 0$ (combiné avec la stricte croissance...). Ainsi $\ln(2^n) \to +\infty$. Par unicité de la limite d'une suite, $\ln \underset{+\infty}{\to} +\infty$

II.4.5 Corollaire
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $c \in \mathring{I}$.

1. *Si f est croissante alors f admet une limite à droite et à gauche en c et on a $\lim_{c^-} f \leqslant f(c) \leqslant \lim_{c^+} f$.*
2. *Si f est décroissante alors f admet une limite à droite et à gauche en c et on a $\lim_{c^+} f \leqslant f(c) \leqslant \lim_{c^-} f$.*

Preuve.
C'est immédiat en considérant les fonctions $f_{|I \cap]c, +\infty[}$ et $f_{|I \cap]-\infty, c[}$ qui sont également monotones. ∎

III Continuité

III.1 Fonctions continues

III.1.1 Définition

1. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. On dit que f est continue en a si elle admet une limite en a. Dans ce cas on sait que $\lim_a f = f(a)$ c'est à dire $f \underset{a}{=} f(a) + o(1)$. On peut résumé "epsilonesquement" cette définition de la continuité en a :*
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha_\varepsilon \forall x \in I \ |x - a| \leqslant \alpha_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon.$$
On appelle parfois le réel $\alpha(f, a, \varepsilon)$ un module de continuité.
2. *Si f est continue en tout point de I, on dit que f est continue sur I.*
3. *On note $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$.*

III.1.2 Exemple

1. On a montré en TD que toute fonction constante est continue sur $\mathbb{R}$, et que l'identité est continue sur $\mathbb{R}$. On en déduit par produit de limites finies que toute fonction polynomiale possède cette propriété et que toute fonction rationnelle (quotient de polynômes) est continue en tous les points où son dénominateur ne s'annule pas.
2. exp est continue sur $\mathbb{R}$ et ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. On le démontrera proprement dans ce chapitre.

III.1.3 Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. On dit que f est continue à gauche en a si $\lim_{a^-} f = f(a)$. on dit que f est continue à droite en a si $\lim_{a^+} f = f(a)$.

III.1.4 Exemple

Etude de la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$.

Pour mémoire on a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $E(x) \leqslant x < E(x)+1$, autrement dit pour $n \in \mathbb{Z}$ on a $\forall x \in [n, n+1[\ E(x) = n$.

Donc $\lim\limits_{n+} E(x) = n$ et cette fonction est continue à droite en tout entier relatif.

Par contre $\lim\limits_{n^-} f = n - 1 \neq E(x)$. Donc partie entière n'est pas continue à gauche en n.

III.1.5 Proposition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$ qui n'est pas une borne. f est continue en a ssi f est continue à droite et à gauche en a.

III.1.6 Prolongement par continuité

Soit $f : I \backslash \{a\} \to \mathbb{R}$. Supposons en outre que $\lim_a f$ existe et soit finie (rappel : il s'agit des limites à gauche et à droites qui sont égales). On la note l. Alors on défini $\widetilde{f} : \begin{cases} I \cup \{a\} & \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad \begin{cases} x & \text{si } x \in I \\ l \text{ si } x = a \end{cases} \end{cases}$.

Par définition, $\widetilde{f}$ est continue en tout point de I. Prouvons qu'elle l'est aussi en a. On a
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha > 0 \forall x \in I \ |x - a| \leqslant \alpha \Rightarrow |\widetilde{f}(x) - l| \leqslant \varepsilon.$$
Comme $\widetilde{f}(a) = l$, cette propriété reste vraie pour tous les $x \in I \cup \{a\}$, c'est à dire que $\widetilde{f}$ est continue en a.

On appelle cette fonction le prolongement par continuité de f et a, et on le note souvent encore f. Remarquer l'unicité par unicité de la limite.

III.1.7 Restriction

Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ et $J \subset I$. Alors $f \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R})$. On se sert de cette propriété quand on a besoin d'une caractéristique bien précise du l'intervalle de définition que I ne possède pas (typiquement f ne s'annule pas).

III.1.8 Théorème

1. *Soient $f, g \in I \to \mathbb{R}$, $a \in I$.Si f et g sont continues en a alors les fonctions $f + g, -f, fg$ sont continues en a. Si f est non nulle en a, alors $\frac{1}{f}$ est définie au voisinage de a et est continue en a.*
Le même résultat s'applique aux continuités à gauche, à droite et sur un intervalle.

2. *Soient $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ (où J est lui aussi un intervalle infini). Soit $a \in I$. Si f est continue en a et que g est continue en $f(a)$ alors $g \circ f$ est continue en a.*
   En particulier si f est continue sur I et g continue sur J alors $g \circ f$ est continue sur I.

III.1.9 Explication

Surtout bien prendre garde à mettre en évidence les intervalles en jeu.

III.1.10 Exercice

Etudier la continuité de $x \mapsto \left(\ln(x^2 + e^{\frac{1}{x}})\right)^2$.

III.1.11 Exemple

Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. Comme la fonction $|.|$ est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction $|f|$ est continue.

III.2 Propriétés des fonctions continues

III.2.1 Théorème (Valeurs intermédiaires)

Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. Soient $a, b \in I$. Si $f(a)f(b) \leqslant 0$ alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$

Preuve.
On va faire la preuve dans le cas où $a \leqslant b$. L'autre cas se traitent de manière similaire. On cherche $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$. On va effectuer la recherche par dichotomie.

On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$. Supposons qu'on ait construit a_i et b_i pour $i \in [\![1, n]\!]$ de telle manière que

1. $a_0 \leqslant a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant \cdots \leqslant b_1 \leqslant b_0$.
2. $\forall i \in [\![0, n]\!]\ b_i - a_i = \frac{b-a}{2^i}$.
3. $\forall i \in [\![0, n]\!]\ f(a_i)f(b_i) \leqslant 0$.

Ces trois points sont vérifiés au rang 0 car $f(a)f(b) \leqslant 0$ et $a \leqslant b$.

On défini maintenant $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$ et on pose

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n \\ b_{n+1} = c_n \end{cases} \text{ si } f(a_n)f(c_n) \leqslant 0 \text{ et } \begin{cases} a_{n+1} = a_n \\ b_{n+1} = c_n \end{cases} \text{ sinon.}$$

On remarque que dans le deuxième cas, $f(a_n)$ et $f(c_n)$ ont le même signe, qui est donc l'opposé de celui de $f(b_n)$. Ainsi $f(c_n)f(b_n) \leqslant 0$.

On a alors $a_{n+1} \leqslant a_n \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$ car $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$.

De plus $a_{n+1} - b_{n+1} = c_n - a_n = b_n - c_n = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b-a}{2^{n+1}}$.

Et finalement $f(a_{n+1})f(b_{n+1}) \leqslant 0$ dans chacun des deux cas possible.

Par récurrence on a construit deux suites adjacentes $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ qui convergent donc vers un réel noté c. Comme f est continue en c on a $\lim_{+\infty} f(a_n) = \lim_{+\infty} f(b_n) = f(c)$ et finalement par passage à la limite des inégalités de 3) on a $f(c) = 0$. ■

III.2.2 Corollaire

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue et $a, b \in I$ et y est entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe c entre a et b tel que $f(c) = y$

Preuve.
On considère $g : x \mapsto f(x) - y$ qui est continue et change de signe car y est entre $f(a)$ et $f(b)$ ■

III.2.3 Rappel

Soit $A \subset \mathbb{R}$. A est un intervalle ssi $\forall u, v \in A \forall x \in A u \leqslant x \leqslant v \Rightarrow x \in A$: il n'y a pas de "trou" dans un intervalle et tout ensemble sans "trou" est un intervalle.

III.2.4 Corollaire

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle. Plus précisément, si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue alors $f(I)$ est un intervalle (toujours avec notre convention pour I...).

Preuve.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On va montrer que $f(I) = \{y \in \mathbb{R} | \exists c \in I y = f(c)\}$ est un intervalle. Pour cela on prend $y_a, y_b \in f(I)$. On a alors $y_a = f(a)$ et $y_b = f(b)$ pour $a, b \in I$ bien choisis, par définition de l'image. Mais d'après le TVI, tout y entre y_a et y_b est l'image d'un c entre a et b, c'est à dire d'un $c \in I$.

Finalement, $f(I)$ est un intervalle. ∎

III.2.5 Corollaire (Image d'un intervalle par une fonction continue strictement monotone.)
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue strictement croissante et $a < b \in \mathbb{R}$.
- *Si $I = [a, b]$ alors $f(I) = [f(a), f(b)]$.*
- *Si $I =]a, b[$ alors $f(I) =]\lim\limits_{a^+} f, \lim\limits_{b^-} f[$.*
- *Si $I =]a, b]$ alors $f(I) =]\lim\limits_{a^+} f, f(b)]$*
- *Si $I = [a, b[$ alors $f(I) = [f(a), \lim\limits_{b^-} f[$*

Preuve.
D'après le théorème de la limite monotone, la limite de f à droite en a existe et vaut $\inf_I f$. De même, la limite à gauche en b vaut $\sup_I f$. Si $a \in I$ alors $f(a) \in f(I)$ et l'intervalle est de la forme $[f(a), .)$.

Si $a \notin I$ alors $\inf_I f = \lim\limits_{a^+} f \notin f(I)$. En effet sinon on aurait un $x \in]a, b] \cap I$ tel que $f(x) = \lim\limits_{a^+} f$ et en particulier f serait constante sur $]a, x]$ par croissance. Ceci contredit la stricte croissance.

Le raisonnement est similaire en b. ∎

III.2.6 Méthode

Pour prouver qu'une équation du type $f(x) = \alpha$ (d'inconnue x) admet une et une seule solution :
- Prouver (par une étude de fonction par exemple) que α est dans l'image de f. Utiliser le TVI pour conclure à l'existence de α.
- Utiliser une STRICTE monotonie de f pour conclure à son injectivité et ainsi à l'unicité de α.

III.2.7 Théorème
Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. Alors f est bornée et atteint ses bornes. De manière équivalente, l'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

III.2.8 Exercice
Montrer que toute fonction périodique continue sur $\mathbb{R}$ est bornée.

III.2.9 Remarque

Ce théorème est l'un des moyens efficace pour prouver qu'un ensemble de nombres réels possède un minimum ou un maximum

III.3 Bijections

III.3.1 Lemme
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ monotone. Si f est discontinue en un point $c \in I$ alors $f(I)$ n'est pas un intervalle.

Preuve.
On suppose f croissante pour la preuve (appliquer à $-f$ pour prouver l'autre partie) et que c est à l'intérieur de I (le raisonnement est similaire et plus simple pour une borne).

D'après le théorème de limite monotone $\lim_{c^-} f \leqslant f(c) \leqslant \lim_{c^+} f$ (les limites existent et..) avec au moins une inégalité stricte sinon f serait continue en c. Supposons par exemple $l = \lim_{c^-} f < f(c)$. Alors pour $x \in I$ on a deux cas : $x < c$ et alors $f(x) \leqslant l$ (l est une borne sup) ou $x \geqslant c$ et alors $f(x) \geqslant f(c)$. Ainsi $f(I)$ possède un "trou" : l'intervalle $]l, f(c)[$ et donc n'est pas un intervalle. ∎

III.3.2 Théorème
Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. On pose $J = f(I)$. C'est un intervalle. Si f est strictement monotone alors f est bijective de I dans J et f^{-1} est continue sur J et strictement monotone de même sens de variations que f.

Preuve.
On suppose que f est strictement croissante. Le raisonnement est similaire pour f décroissante.

1. Montrons que $f^{-1} : J \to I$ est strictement croissante. Si en effet on a $x < y$ et $f^{-1}(x) \geqslant f^{-y}(y)$ alors en appliquant f on obtient $x \geqslant y$. Contradiction. Donc f^{-1} est strictement croissante.
2. Soit $b \in J$. Montrons que f^{-1} est continue en b. Par l'absurde : si f^{-1} n'est pas continue en b alors d'après le lemme $f^{-1}(J) = I$ n'est pas un intervalle. Donc f^{-1} est continue en b. ∎

III.3.3 Rappels sur les représentations graphiques

Le graphe de f est $\{(x, f(x))|\ x \in I\}$. Le graphe de f^{-1} est $\{(y, f^{-1}(y))|\ y \in J\} = \{(f(x), x)|\ x \in I\}$. Ainsi les représentations graphiques de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à $y = x$.

III.3.4 Exemple
$f : x \to x + \ln(x)$ est une bijection entre intervalles à préciser. Equivalent de la réciproque en $+\infty$.

III.4 Extension aux fonctions à valeurs complexes

III.4.1 Définition
Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction. On pose $\operatorname{Re} f : x \mapsto \operatorname{Re} f(x)$ et $\operatorname{Im} f : x \mapsto \operatorname{Im} f(x)$. Ce sont les parties réelles et imaginaires de f.

On défini alors la conjugué de f, $\overline{f} : x \mapsto \overline{f(x)} = \operatorname{Re} f - i \operatorname{Im} f$. et son module $|f| : x \mapsto |f(x)|$.

III.4.2 Définition
On dit que $f : I \to \mathbb{C}$ est bornée si son module l'est.

III.4.3 Définition
Soit $f : I \to \mathbb{C}$, $a \in I$ et $l \in \mathbb{C}$. On dit que f admet l pour limite en a si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha > 0 \forall x \in I\ |x - a| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - l| \varepsilon.$$

III.4.4 Théorème
f admet une limite l en a ssi sa partie imaginaire et sa partie réelle admettent des limites finies x et y en a et alors $l = x + iy$.

On en déduit l'unicité de la limite et $l = f(a)$. On en déduit également la compatibilité de la prise de limite avec les opérations.

III.4.5 Définition
Soit $f : I \to \mathbb{C}$. Si f admet une limite en a on dit que f est continue en a. on dit que f est continue sur I si elle est continue en tout point de I.

On note $\mathcal{C}(I, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues sur I. à valeurs complexes.

III.4.6 Proposition
Les théorèmes d'opérations sur les limites finies (somme, produit, inverse) sont encore vrais pour les fonctions $I \to \mathbb{C}$.