I Les notions fondamentales

Il s'agit ici des notions de base, qui soutiennent tout le chapitre.

— Définition de valeur et vecteur propre pour un endomorphisme, pour une matrice.
— Conditions d'inversibilité pour une matrice (sur les colonnes, par le rang, par le déterminant) et de bijectivité d'un endomorphisme en dimension finie.
— Polynôme caractéristique : définition, degré, coefficient dominant.
— Matrice d'un endomorphisme dans une base, changement de base, matrices semblables.
— Valeurs propres d'une matrice triangulaire ou diagonale.
— Diagonalisabilité : définition, caractérisations (nous en avons 3), condition suffisante (χ est scindé à racines simples).

II Les savoirs faire

Il s'agit ici des techniques de bases sans lesquelles vous ne pourrez utiliser ce chapitre.

— Calculer un polynôme caractéristique, identifier ses racines et leurs multiplicités.
— Calculer des espaces propres pour une matrice ou un endomorphisme, ainsi que leurs dimensions.
— Utiliser une matrice de passage pour : changer un endomorphisme de base (voir le cours sur les matrices semblables), changer de coordonnées pour un vecteur donné (formule $X = PX'$ à savoir interpréter).
— Interpréter sur une colonne de matrice le fait qu'un vecteur est vecteur propre (voir la preuve : f est diagonalisable ssi il existe une base composée de vecteurs propres).
— Utiliser le théorème du rang pour calculer la dimension d'un espace propre (en gardant en tête que $\ker(f) = \ker(f - 0Id)$).
— Traduire d'un point de vue général (dans un cas particulier, ou théorique) qu'un scalaire est valeur propre, qu'un vecteur est vecteur propre, qu'un endomorphisme ou une matrice est diagonalisable.
— Lier la trace et le déterminant aux valeurs propres.

III Les pièges classiques

Une sélection choisie mais non exhaustive des erreurs classiques

— Oublier les signes lors du calcul de $xI_n - A$.
— Penser qu'une racine double implique forcément la non-diagonalisabilité.
— Se précipiter dans la résolution d'un système et poser trop ou trop peu de paramètres.
— Trouver un espace propre de dimension 0, ou seulement 0 comme vecteur propre ! (ce qui est impossible, rappelons le).
— Penser que toute matrice est diagonalisable.

IV Pour aller plus loin

Une fois les points précédents acquis, nous pouvons nous diriger vers des questions type concours.

— Prouver par des arguments théoriques (sur les espaces propres) qu'un endomorphisme est diagonalisable (somme directe ou multiplicité = dimension).
— Calculer rapidement un vecteur d'un noyau par interprétation par colonnes du produit matriciel.
— Utiliser la stabilité de certaines droites pour trouver des espaces propres (en lien avec les matrices/endomorphismes qui commutent).
— Toute matrice est trigonalisable dans $\mathbb{C}$.
— "Deviner " une valeur propre en remarquant que $A - \lambda I_n$ n'est pas de rang n pour un certain λ bien choisi. Traduire la relation de dépendance linéaire en une colonne non nulle qui est vecteur propre.