I Limites

I.1 Limite d'une fonction

Définition 1

Soit $a \in \overline{I}$. Un voisinage de a dans I est
- *un intervalle centré en a si $a \in \mathbb{R}$, c'est à dire un intervalle de la forme $I \cap [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ pour un $\varepsilon > 0$*
- *un intervalle de la forme $I \cap [c, +\infty[$ si $a = +\infty$.*
- *un intervalle de la forme $I \cap]-\infty, c]$ si $a- = \infty$.*

On dira qu'une propriété est vraie au voisinage de a si elle est vraie pour un voisinage de a.

Par exemple sin *est croissante au voisinage de 0, mais on ne peut rien dire de tel sur* cos.

Définition 2

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \overline{I}$ et $l \in \overline{R}$..

1. *Limite en un point : $a \in \mathbb{R}$*
   (a) *si $l \in \mathbb{R}$ on dit que f admet l pour limite en a si*
   $$\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha > 0 \forall x \in I\ |x-a| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x)-l| \leqslant \varepsilon.$$
   (b) i. *on dit que f admet $-\infty$ pour limite en a si $\forall A \in \mathbb{R}_- \exists \alpha > 0 \forall x \in I\ |x-a| \leqslant \alpha \Rightarrow f(x) \leqslant A$.*
   ii. *on dit que f admet $+\infty$ pour limite en a si $\forall A \in \mathbb{R}_+ \exists \alpha > 0 \forall x \in I\ |x-a| \leqslant \alpha \Rightarrow f(x) \geqslant A$.*
2. *Limite en l'infini*
   (a) *Si $a = +\infty$*
   i. *si $l \in \mathbb{R}$, on dit que f admet l pour limite en $+\infty$ si*
   $$\forall \varepsilon > 0 \exists B \in \mathbb{R}_+ \forall x \in I\ x \geqslant B \Rightarrow |f(x)-l| \leqslant \varepsilon.$$
   ii. *on dit que f admet $+\infty$ comme limite en $+\infty$ si $\forall A \in \mathbb{R}_+ \exists B \in \mathbb{R}^+ \forall x \in I\ x \geqslant B \Rightarrow f(x) \geqslant A$.*
   iii. *on dit que f admet $-\infty$ comme limite en $+\infty$ si $\forall A \in \mathbb{R}_- \exists B \in \mathbb{R}^+ \forall x \in I\ x \geqslant B \Rightarrow f(x) \leqslant A$.*
   (b) *Si $a = -\infty$*
   i. *si $l \in \mathbb{R}$, on dit que f admet l pour limite en $-\infty$ si*
   $$\forall \varepsilon > 0 \exists B \in \mathbb{R}_- \forall x \in I\ x \leqslant B \Rightarrow |f(x)-l| \leqslant \varepsilon.$$
   ii. *on dit que f admet $+\infty$ comme limite en $-\infty$ si $\forall A \in \mathbb{R}_+ \exists B \in \mathbb{R}^- \forall x \in I\ x \leqslant B \Rightarrow f(x) \geqslant A$.*
   iii. *on dit que f admet $-\infty$ comme limite en $-\infty$ si $\forall A \in \mathbb{R}_- \exists B \in \mathbb{R}^- \forall x \in I\ x \leqslant B \Rightarrow f(x) \leqslant A$.*

Si l est la limite de f en a on note souvent $f(x) \underset{x \to a}{\to} l$ ou $f \underset{a}{\to} l$.

Théorème 1

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \overline{I}$. Si f admet une limite finie en a alors f est bornée au voisinage de a.

Théorème 2 (Unicité de la limite)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \overline{I}$.
1. *Si f admet une limite en a alors celle-ci est unique. On la note $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ ou encore $\lim\limits_{a} f$.*
2. *Si $a \in I$ et que f admet une limite en a alors $\lim\limits_{a} f = f(a)$.*

Corollaire 1

Les coefficients d'un DL sont uniques. Plus précisément, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour toute fonction qui admet un DL_n en a, les coefficients de ce DL sont uniques.

I.2 Caractérisations

Proposition 1

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}, l \in \overline{\mathbb{R}}$.
1. *Si $a \in \mathbb{R}$ alors $\lim\limits_{a} f = l \iff \lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = l$.*
2. *Si $l \in \mathbb{R}$ alors $\lim\limits_{a} f = l \iff \lim\limits_{x \to a} f(x) - l = 0 \iff \lim\limits_{x \to a} |f(x) - l| = 0$.*

I.3 Propriétés des fonctions possédant des limites

Proposition 2 (Inégalités strictes)

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$, $l, l' \in \mathbb{R}$ et $m, M \in \mathbb{R}$. Supposons en outre que $\lim\limits_{a} f = l$ et $\lim\limits_{a} g = l'$
1. *Si $l < l'$ alors $f < g$ au voisinage de a*
2. *Si $l < M$ alors $f < M$ au voisinage de a.*
3. *Si $l > m$ alors $f > m$ au voisinage de a.*

Théorème 3 (Passage à la limite des inégalités larges)

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$, $l, l' \in \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$, $m, M \in \mathbb{R}$.

1. *Si* $\lim_a f = l$ *et* $\lim_a g = l'$ *et que* $f(x) \leqslant g(x)$ *au voisinage de* a *alors* $l \leqslant l'$.
2. *Si* $\lim_a f = l$ *et que* f *est majoré par* M *au voisinage de* a *alors* $l \leqslant M$.
3. *Si* $\lim_a f = l$ *et* $f(x) \geqslant m$ *au voisinage de* a *alors* $l \geqslant m$.

II Théorèmes d'existence

II.1 Théorème des gendarmes

Théorème 4 (Encadrement)
Soient $f, g, h : I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$.

1. *Théorème des gendarmes : Si au voisinage de* a *on a* $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ *et que* $\lim_a g = l$ *et* $\lim_a h = l \in \overline{\mathbb{R}}$ *alors* f *admet une limite en* a *et cette limite vaut* l.
2. *Minoration : Si* $\lim_a g = +\infty$ *et que* $g(x) \leqslant f(x)$ *au voisinage de* a *alors* f *admet une limite en* a *et* $\lim_a f = +\infty$.
3. *Majoration : Si* $\lim_a h = -\infty$ *et que* $f(x) \leqslant h(x)$ *au voisinage de* a *alors* f *admet une limite en* a *et* $\lim_a f = -\infty$.

Corollaire 2
Soit $f, \varepsilon : I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$.

1. *Si* $|f(x)| \leqslant \varepsilon(x)$ *au voisinage de* a *et* $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ *alors* $\lim_a f = 0$.
2. *Si* f *est bornée au voisinage de* a *et que* $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ *alors* $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) f(x) = 0$.

II.2 Opérations

Théorème 5
Les limites de fonctions se comportent comme les limites de suites pour les opérations $+, .,$ *opposé, inverse. Plus précisément les limites suivantes existent :*

$\lim_a f$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_a g$	$l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_a f+g$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$-\infty$

$\lim_a f$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}^*$	$l \in \mathbb{R}^*$	$l = 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_a g$	$l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_a fg$	ll'	$sg(l)\infty$	$-sg(l)\infty$	FI	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

$\lim_a f$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \overline{\mathbb{R}}^*$	$l \in \overline{\mathbb{R}}^*$	0	$\pm\infty$
$\lim_a g$	$l' \in \mathbb{R}^*$	$\pm\infty$	0^+	0^-	0	$\pm\infty$
$\lim_a \frac{f}{g}$	$\frac{l}{l'}$	0	$sg(l)\infty$	$-sg(l)\infty$	FI	FI

Attention, si on ne connaît pas le signe de g *et que* $g \to 0$ *alors on ne sait pas calculer la limite du quotient.*

Proposition 3 (Composée (ou changement de variable))
Soient $f : I \to J$ *et* $g : J \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}, b \in \overline{J}, c \in \overline{R}$.

$$\lim_a f = b \text{ et } \lim_b g = c \Rightarrow \lim_{x\to a} g(f(x)) = c.$$

Théorème 6
Soient $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$, $l \in \overline{\mathbb{R}}$. *Soit* $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *telle que* $u_n \underset{+\infty}{\to} a$.

Si f *admet* l *pour limite en* a *alors la suite* $(f(u_n))$ *admet* l *pour limite en* $+\infty$.

II.3 Limites directionnelles

Définition 3
Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \mathring{I}$ *et* $l \in \overline{\mathbb{R}}$.

On dit que f *admet* l *pour limite à gauche (resp à droite) en* a *si* $f_{|I\cap]-\infty,a[}$ *(resp* $f_{|I\cap]a,+\infty[}$*) admet* l *pour limite en* a*. En tant que limite, il y a unicité de la limite à gauche et à droite qui est notée* $\lim_{a^-} f$ *ou* $\lim_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x)$ *(resp* $\lim_{a^+} f$ *ou* $\lim_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x)$*).*

Théorème 7 (Caractérisation d'une limite finie)
Soient $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \mathring{I}, l \in \overline{\mathbb{R}}$. *Alors*

$$\lim_a f = l \iff l = f(a) \text{ et } \lim_{a^-} f = \lim_{a^+} f = l.$$

Définition 4
Soit $f : I \backslash \{a\} \to \mathbb{R}$*. On dit que* f *admet une limite en* a *si* f *admet une limite à droite et à gauche en* a *et que ces limites sont égales.*

II.4 Lien avec la monotonie

Théorème 8 (Convergence monotone)
Soit f $:]a, b[\to \mathbb{R}$ *une fonction croissante. L'intervalle de départ de* f *étant infini et de bornes finies ou non.*

1. $\lim_b f$ *existe. Elle vaut* $\sup(f(I)) = \sup(\mathrm{Im}(f))$ *quand* f *est majorée et* $+\infty$ *sinon.*
2. $\lim_a f$ *existe. Elle vaut* $\inf(f(I))$ *quand* f *est minorée et* $-\infty$ *sinon.*

Si on suppose plutôt f décroissante, le théorème reste vrai en échangeant les bornes supérieures et inférieures.

Corollaire 3
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $c \in \mathring{I}$.

1. *Si f est croissante alors f admet une limite à droite et à gauche en c et on a $\lim_{c^-} f \leqslant f(c) \leqslant \lim_{c^+} f$.*
2. *Si f est décroissante alors f admet une limite à droite et à gauche en c et on a $\lim_{c^+} f \leqslant f(c) \leqslant \lim_{c^-} f$.*

III Continuité

III.1 Fonctions continues

Définition 5

1. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. On dit que f est continue en a si elle admet une limite en a. Dans ce cas on sait que $\lim\limits_{a} f = f(a)$ c'est à dire $f \underset{a}{=} f(a) + o(1)$. On peut résumer cette définition de la continuité en a :*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha_\varepsilon \forall x \in I \ |x - a| \leqslant \alpha_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon.$$

   On appelle parfois le réel $\alpha(f, a, \varepsilon)$ un module de continuité.
2. *Si f est continue en tout point de I, on dit que f est continue sur I.*
3. *On note $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$.*

Définition 6
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. On dit que f est continue à gauche en a si $\lim_{a^-} f = f(a)$. on dit que f est continue à droite en a si $\lim_{a^+} f = f(a)$.

Proposition 4
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$ (et a n'est pas une borne). f est continue en a ssi f est continue à droite et à gauche en a.

Théorème 9

1. *Soient $f, g \in I \to \mathbb{R}$, $a \in I$.Si f et g sont continues en a alors les fonctions $f + g, -f, fg$ sont continues en a. Si $f(a) \neq 0$ alors $\frac{1}{f}$ est définie au voisinage de a et est continue en a.*
   Le même résultat s'applique aux continuités à gauche, à droite et sur un intervalle.
2. *Soient $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ (où J est lui aussi un intervalle infini). Soit $a \in I$. Si f est continue en a et que g est continue en $f(a)$ alors $g \circ f$ est continue en a. En particulier si f est continue sur I et g continue sur J alors $g \circ f$ est continue sur I.*

III.2 Propriétés des fonctions continues

Théorème 10 (Valeurs intermédiaires)
Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. Soient $a, b \in I$. Si $f(a)f(b) \leqslant 0$ alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$

Corollaire 4
Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue et $a, b \in I$ et y est entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe c entre a et b tel que $f(c) = y$

Corollaire 5
L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle. Plus précisément, si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue alors $f(I)$ est un intervalle (toujours avec notre convention pour I...).

Corollaire 6 (Image d'un intervalle par une fonction continue strictement monoton
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue strictement croissante et $a < b \in \mathbb{R}$.

— *Si $I = [a, b]$ alors $f(I) = [f(a), f(b)]$.*
— *Si $I =]a, b[$ alors $f(I) =]\lim\limits_{a^+} f, \lim\limits_{b^-} f[$.*
— *Si $I =]a, b]$ alors $f(I) =]\lim\limits_{a^+} f, f(b)]$*
— *Si $I = [a, b[$ alors $f(I) = [f(a), \lim\limits_{b^-} f[$*

Si f est strictement décroissante, il suffit d'échanger les bornes de $f(I)$.

Théorème 11
Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. Alors f est bornée et atteint ses bornes. De manière équivalente, l'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

III.3 Bijections

Lemme 1
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ monotone. Si f est discontinue en un point $c \in I$ alors $f(I)$ n'est pas un intervalle.

Théorème 12
Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. On pose $J = f(I)$. C'est un intervalle. Si f est strictement monotone alors $f : I \to J$ est bijective de I dans J et f^{-1} est continue sur J et strictement monotone de même sens de variations que f.

III.4 Extension aux fonctions à valeurs complexes

Définition 7
Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction. On pose $\operatorname{Re} f : x \mapsto \operatorname{Re} f(x)$ et $\operatorname{Im} f : x \mapsto \operatorname{Im} f(x)$. Ce sont les parties réelles et imaginaires de f.

On défini alors la conjugué de f, $\overline{f} : x \mapsto \overline{f(x)} = \operatorname{Re} f - i \operatorname{Im} f$. et son module $|f| : x \mapsto |f(x)|$.

Définition 8
On dit que $f : I \to \mathbb{C}$ est bornée si son module l'est.

Définition 9
Soit $f : I \to \mathbb{C}$, $a \in I$ et $l \in \mathbb{C}$. On dit que f admet l pour limite en a si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha > 0 \forall x \in I \ |x - a| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - l| \varepsilon.$$

Théorème 13
f admet une limite l en a ssi sa partie imaginaire et sa partie réelle admettent des limites finies x et y en a et alors $l = x + iy$.

On en déduit l'unicité de la limite et $l = f(a)$. On en déduit également la compatibilité de la prise de limite avec les opérations.

Définition 10
Soit $f : I \to \mathbb{C}$. Si f admet une limite en a on dit que f est continue en a. on dit que f est continue sur I si elle est continue en tout point de I.

On note $\mathcal{C}(I, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues sur I. à valeurs complexes.

Proposition 5
Les théorèmes d'opérations sur les limites finies (somme, produit, inverse) sont encore vrais pour les fonctions $I \to \mathbb{C}$.