

# Table des matières

- I Intégrales convergentes** 1
- I.1 Convergence en  $+\infty$  1
- I.2 Convergence sur un intervalle quelconque 1
- II Propriétés des intégrales convergentes** 2
- II.1 Généralisation des propriétés 2
- II.2 Les outils de calcul 2
- III Fonctions intégrables** 3
- III.1 Fonctions positives 3
- III.2 Convergence absolue 3
- III.3 Comparaison 3
- IV Exemples importants** 3
- IV.1 Intégrales classiques 3
- IV.2 Application aux séries numériques 3

## I Intégrales convergentes

### I.1 Convergence en $+\infty$

#### Définition 1

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle de la forme  $[a, +\infty[$ .

Lorsque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t)dt$  existe et est finie, on dit que  $\int_a^{+\infty} f(t)dt$  est une intégrale convergente (en  $+\infty$ ) et qu'elle vaut cette limite. Dans le cas contraire, on dit que cette intégrale est divergente.

On peut également noter  $\int_a^{+\infty} f$ .

#### Proposition 1

Soit  $k \in \mathbb{R}$ .

$$\int_0^{+\infty} e^{-kt} dt \text{ converge en } +\infty \text{ ssi } k > 0 \text{ et alors } \int_0^{+\infty} e^{-kt} dt = \frac{1}{k}.$$

#### Théorème 1 (Intégrales de Riemann)

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

1.  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$  converge ssi  $\alpha > 1$ .

2.  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$  est en particulier une intégrale **divergentes**

### I.2 Convergence sur un intervalle quelconque

#### Définition 2

Soient  $a < \boxed{b \leq +\infty}$  et  $f \in \mathcal{C}([a, b[, \mathbb{R})$  une fonction **continue**.

Si  $\lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t)dt$  existe et est finie on la note  $\int_a^b f(t)dt$  et on dit que cette intégrale est une intégrale **convergente** (ou convergente en  $b$ ). Dans le cas contraire, l'intégrale est dite divergente.

#### Définition 3

Soient  $\boxed{-\infty \leq a} < b$  et  $f \in \mathcal{C}(]a, b], \mathbb{R})$ . La **borne ouverte est  $a$** .

Si  $\lim_{x \rightarrow a} \int_x^b f(t)dt$  existe et est finie on la note  $\int_a^b f(t)dt$  et on dit que cette intégrale est une intégrale **convergente** (en  $a$ ).

#### Proposition 2

$$\int_0^1 \ln(t)dt \text{ converge et vaut } -1$$

#### Théorème 2 (Intégrales de Riemann)

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

1.  $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$  converge ssi  $\alpha < 1$ .
2.  $\int_0^1 \frac{1}{t} dt$  est en particulier une intégrale **divergentes**.

#### Définition-Proposition 1

Soient  $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$  avec  $a < b$  (on peut avoir  $a = -\infty$  et / ou  $b = +\infty$ ). Soit  $f \in \mathcal{C}(]a, b[, \mathbb{R})$ .

S'il existe un  $c \in ]a, b[$  tel que  $\int_a^c f$  et  $\int_c^b f$  sont des intégrales convergentes alors on dit que  $\int_a^b f$  converge (on a convergence à la fois en  $a$  et en  $b$ ).

Dans ce cas on a  $\forall c' \in ]a, b[ \int_a^{c'} f + \int_{c'}^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$  et on note cette valeur  $\int_a^b f$ .

**Définition 4 (Notation)**

Soit  $I$  un intervalle dont les bornes sont  $a < b$ . Ces bornes peuvent être ouvertes ou fermées. On note  $\int_I f$  l'intégrale (classique ou généralisée)  $\int_a^b f$ .

Cette notation permet de ne pas préciser à priori la nature fermée ou ouverte des bornes.

**Proposition 3 (Prolongement par continuité)**

On se place dans le cas  $f \in \mathcal{C}([a, b[, \mathbb{R})$  et  $b \in \mathbb{R}$  (ce n'est pas  $+\infty$ ). Si on peut prolonger  $f$  par continuité en  $b$  (on note  $\tilde{f}$  le prolongement), alors l'intégrale  $\int_a^b f$  converge et sa valeur

est  $\int_a^b \tilde{f}(t)dt$  (qui est une intégrale sur un segment).

Le résultat s'applique encore lorsque c'est la borne inférieure qui est ouverte, voire lorsque les deux bornes sont ouvertes, si on peut prolonger à chaque borne.

## II Propriétés des intégrales convergentes

### II.1 Généralisation des propriétés

**Proposition 4 (Linéarité des intégrales convergentes)**

Soient  $f, g : [a, b[ \rightarrow \mathbb{K}$  deux fonctions continues.

Si  $\int_a^b f$  et  $\int_a^b g$  convergent toutes les deux en  $b$  alors pour tout  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ ,  $\int_a^b (\alpha f + \beta g)$  converge également en  $b$  et on a

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt$$

Ce résultat est également valable dans le cas où la borne ouverte est la borne inférieure de l'intervalle d'intégration.

**Proposition 5**

Soient  $f, g : [a, b[ \rightarrow \mathbb{K}$  deux fonctions continues.

— Relation de Chasles :  $\int_a^b f$  converge ssi pour tout  $c \in [a, b[$ ,  $\int_c^b f$  converge et alors

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

— Positivité : si  $\forall t \in [a, b[ f(t) \geq 0$  et  $\int_a^b f$  converge, alors  $\int_a^b f \geq 0$ .

— Croissance : si  $\forall t \in [a, b[ f(t) \leq g(t)$  et  $\int_a^b f, \int_a^b g$  convergent, alors  $\int_a^b f \leq \int_a^b g$ .

Les mêmes propriétés sont encore valables pour les intégrales convergentes en la borne inférieure.

**Théorème 3**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^+$  une fonction continue, positive et telle que  $\int_I f(t)dt$  converge.

Si  $\int_I f = 0$  alors  $\forall x \in I f(x) = 0$ .

### II.2 Les outils de calcul

**Théorème 4**

Soient  $f \in \mathcal{C}([a, b[, \mathbb{R})$  et  $\varphi : ]\alpha, \beta[ \rightarrow ]a, b[$  une bijection de classe  $\mathcal{C}^1$  strictement croissante.

$\int_a^b f(t)dt$  et  $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)du$  sont de même nature et égales quand elles convergent.

Ce théorème s'applique aussi lorsque qu'une des deux bornes est a priori fermée.

**Proposition 6**

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$

La fonction  $t \mapsto \frac{1}{|t-a|^\alpha}$  est intégrable en  $a$  ssi  $\alpha < 1$ .

**Théorème 5 (Intégration par parties)**

Soient  $u, v : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Si  $\lim_{x \rightarrow b^-} u(x)v(x)$  existe et est finie alors  $\int_a^b u'v$  et  $\int_a^b uv'$  sont de même nature et en cas de convergence

$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$$

où on a noté  $[uv]_a^b = \lim_{x \rightarrow b^-} u(x)v(x) - u(a)v(a)$ .

## III Fonctions intégrables

### III.1 Fonctions positives

**Proposition 7**

Soit  $f : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et **positive**.

$\int_a^b f(t)dt$  converge ssi  $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$  est une fonction majorée.

**Proposition 8**

Soient  $f, g : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continues.

Si  $\forall t \in [a, b[$   $0 \leq f(t) \leq g(t)$  et  $\int_a^b g(t)dt$  converge, alors  $\int_a^b f(t)dt$  converge.

**III.2 Convergence absolue****Définition 5**

Soit  $I$  un intervalle et  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  une fonction continue. On dit que  $f$  est **intégrable** sur  $I$  ssi  $\int_I |f|$  converge, c'est à dire que  $\int_I f$  est absolument convergente.

L'ensemble des fonctions continues et intégrables définies sur l'intervalle  $I$  et à valeurs dans  $\mathbb{K}$  est noté  $L^1(I, \mathbb{K})$ .

**Théorème 6**

Soit  $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ . SI  $f$  est intégrable sur  $I$  ALORS  $\int_I f$  converge.

**Proposition 9 (Inégalité triangulaire)**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  une fonction continue.

Si  $f$  est intégrable sur  $I$  alors  $\left| \int_I f \right| \leq \int_I |f|$ .

**III.3 Comparaison****Théorème 7 (Comparaison)**

Soient  $f, g \in \mathcal{C}([a, b[, \mathbb{K})$  des fonctions continues.

1. Si  $|f| \leq |g|$  au voisinage de  $b$  et  $g$  est intégrable en  $b$  alors  $f$  est intégrable en  $b$ .
2. Si  $f = O_b(g)$  et  $g$  est intégrable en  $b$  alors  $f$  est intégrable en  $b$ .
3. Si  $f = o_b(g)$  et  $g$  est intégrable en  $b$  alors  $f$  est intégrable en  $b$ .
4. Si  $f \sim_b g$  alors  $f$  est intégrable en  $b$  ssi  $g$  est intégrable en  $b$ .

Le résultat vaut encore pour des fonctions définies sur  $]a, b]$ , à condition de prouver des relations de comparaison (ou une inégalité) en  $a$ .

**Proposition 10**

$L^1(I, \mathbb{K})$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel : toute combinaison linéaire de fonctions intégrables est encore intégrable.

**IV Exemples importants****IV.1 Intégrales classiques****IV.2 Application aux séries numériques****Théorème 8**

Soit  $f : [n_0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  (avec  $n_0 \in \mathbb{N}$ ) une fonction **continue, positive et décroissante**.

$\int_{n_0}^{+\infty} f(t)dt$  et  $\sum_{n \geq n_0} f(n)$  ont la même nature