Table des matières

Dans ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I un intervalle non vide et non réduit à un point.

I Intégrales convergentes

Le cadre d'étude change : on considère toujours des fonctions continues, non seulement sur des segments mais des intervalles quelconques.

I.1 Convergence en $+\infty$

I.1.1 Définition
Soit f une fonction continue sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$.

Lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ existe et est finie, on dit que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ est une intégrale convergente (en $+\infty$) et qu'elle vaut cette limite. Dans le cas contraire, on dit que cette intégrale est divergente.

On peut également noter $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$.

I.1.2 Remarque

Avec les notations de la définition, pour $x \geqslant a$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est une intégrale sur le segment $[a,x]$ et relève donc du cours de première année.

I.1.3 Proposition
Soit $k\in\mathbb{R}$.

$$\int_0^{+\infty} e^{-kt}\mathrm{d}t \text{ converge en } +\infty \text{ ssi } k>0 \text{ et alors } \int_0^{+\infty} e^{-kt}\mathrm{d}t = \frac{1}{k}.$$

Preuve.
Soit $x\geqslant 0$. On a alors

$$\int_0^x e^{-kt}\mathrm{d}t = \begin{cases} x \text{ si } k=0 \\ -\frac{1}{k}(e^{-kx}-1) \text{ si } k\neq 0\end{cases}$$

Le cas $k=0$ donne clairement une intégrale divergente (sa limite est $+\infty$).

Dans le cas $k<0$, $e^{-kx} \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$ et l'intégrale est encore de limite $+\infty$.

Dans le cas $k>0$, $e^{-kx} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$ et l'intégrale converge vers $\frac{1}{k}$. ■

I.1.4 Interprétation graphique

On peut continuer à voir une intégrale convergente comme une aire, mais cette fois comme l'aire limite d'un partie non nécessairement bornée.

I.1.5 Théorème (Intégrales de Riemann)
Soit $\alpha\in\mathbb{R}$.

1. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ converge ssi $\alpha>1$.
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}\mathrm{d}t$ est en particulier une intégrale **divergentes**

Preuve.
Pour toute valeur de α, $f : t\mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est bien continue sur $[1,+\infty[$.

1. Soit $x>1$. $\int\limits_1^x \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t = [\frac{t^{-\alpha+1}}{(1-\alpha)}]_1^x$ si $\alpha\neq 1$ et $[\ln(t)]_1^x$ si $\alpha=1$.

   Dans le cas $\alpha=1$ on a donc une intégrale divergente.

Pour $\alpha \neq 1$, $x^{-\alpha+1} \underset{x\to+\infty}{\to} \begin{cases} 0 \text{ si } \alpha > 1 \\ +\infty \text{ si } \alpha < 1 \end{cases}$. On retrouve bien le résultat annoncé.

2. Conséquence directe du point précédent. ■

I.2 Convergence sur un intervalle quelconque

I.2.1 Définition
Soient $a < \boxed{b \leqslant +\infty}$ et $f \in \mathcal{C}([a, b[, \mathbb{R})$ une fonction **continue**.

Si $\lim\limits_{x\to b} \int\limits_a^x f(t)\mathrm{d}t$ existe et est finie on la note $\int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et on dit que cette intégrale est une intégrale **convergente** (ou convergente en b). Dans le cas contraire, l'intégrale est dite divergente.

I.2.2 Remarque

Il s'agit d'une généralisation directe de la définition précédente, mais cette fois la borne ouverte b peut être égale ou non à $+\infty$. On peut facilement adapter cette définition lorsque la borne ouverte est la borne inférieure de l'intervalle de définition.

I.2.3 Définition
Soient $\boxed{-\infty \leqslant a} < b$ et $f \in \mathcal{C}(]a, b], \mathbb{R})$. La borne ouverte est a.

Si $\lim\limits_{x\to a} \int\limits_x^b f(t)\mathrm{d}t$ existe et est finie on la note $\int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et on dit que cette intégrale est une intégrale **convergente** (en a).

I.2.4 Proposition

$\int\limits_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t$ converge et vaut -1

Preuve.
ln est continue sur $]0, 1]$. Pour $x \in]0, 1]$ on a

$$\int_x^1 \ln(t)\mathrm{d}t = [t\ln(t) - t]_x^1 = -1 - x\ln(x) + x$$

Or, par croissances comparées, $x\ln(x) \underset{x\to 0}{\to} 0$ et donc $\int_x^1 \ln(t)\mathrm{d}t \underset{x\to 0}{\to} -1$ ce qui prouve la convergence et la valeur. ■

I.2.5 Théorème (Intégrales de Riemann)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. $\int\limits_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ converge ssi $\alpha < 1$.
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}\mathrm{d}t$ est en particulier une intégrale **divergentes**.

Preuve.
Pour toute valeur de α, $f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est bien continue sur $]0, 10]$.

1. Soit $x \in]0, 1[$. Le même calcul de primitive qu'au théorème I.1.5 vaut encore. Comme $\ln(x) \underset{0}{\to} -\infty$, $\int_0^1 \frac{1}{t}\mathrm{d}t$ diverge.

   Cette fois, $x^{-\alpha+1} \underset{x\to 0}{\to} \begin{cases} 0 \text{ si } \alpha < 1 \\ +\infty \text{ si } \alpha > 1 \end{cases}$ et on retrouve le résultat de convergence.
2. Conséquence directe du point précédent. ■

I.2.6 Définition-Proposition
Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$ (on peut avoir $a = -\infty$ et / ou $b = +\infty$). Soit $f \in \mathcal{C}(]a, b[, \mathbb{R})$.

S'il existe un $c \in]a, b[$ tel que $\int\limits_a^c f$ et $\int\limits_c^b f$ sont des intégrales convergentes alors on dit que $\int\limits_a^b f$ converge (on a convergence à la fois en a et en b).

Dans ce cas on a $\forall c' \in]a, b[\ \int\limits_a^{c'} f + \int\limits_{c'}^b f = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^b f$ et on note cette valeur $\int\limits_a^b f$.

Preuve.
On a, par limite d'une somme (une intégrale convergente et une constante), $\int_a^c f = \int_a^{c'} f + \int_{c'}^c f$. De même $\int_c^b f = \int_c^{c'} f + \int_{c'}^b f$. Finalement, l'égalité demandée est vérifiée. ■

I.2.7 Définition (Notation)
Soit I un intervalle dont les bornes sont $a < b$. Ces bornes peuvent être ouvertes ou fermées. On note $\displaystyle\int_I f$ l'intégrale (classique ou généralisée) $\displaystyle\int_a^b f$.

Cette notation permet de ne pas préciser à priori la nature fermée ou ouverte des bornes.

Une étude de convergence d'intégrale commence toujours par la justification rapide que l'intégrande est continue, en précisant bien sur quel intervalle et en notant soigneusement quelle(s) borne(s) est/sont ouverte(s) : il s'agit des points où l'on doit étudier la convergence.

I.2.8 Exemple
Montrer la convergence et calculer la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

I.2.9 Proposition (Prolongement par continuité)
On se place dans le cas $f \in \mathcal{C}([a,b[,\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}$ (ce n'est pas $+\infty$). Si on peut prolonger f par continuité en b (on note $\tilde{f}$ le prolongement), alors l'intégrale $\int\limits_a^b f$ converge et sa valeur est $\displaystyle\int_a^b \tilde{f}(t)\mathrm{d}t$ (qui est une intégrale sur un segment).

Le résultat s'applique encore lorsque c'est la borne inférieure qui est ouverte, voire lorsque les deux bornes sont ouvertes, si on peut prolonger à chaque borne.

Preuve.
Soit $F_1 : x \mapsto \int\limits_a^x f(t)\mathrm{d}t$ la primitive de f sur $[a,b[$ qui s'annule en a et $F_2 : x \mapsto \int\limits_a^x \tilde{f}(t)\mathrm{d}t$ la primitive de $\tilde{f}$ sur $[a,b]$ qui s'annule en a, alors $\forall x \in [a,b[$ $F_1(x) = F_2(x)$ et F_2 est continue sur $[a,b]$. F_2 est donc le prolongement par continuité de F_1 et on a bien $F_1(x) \underset{x\to b}{\to} F_2(b) = \int\limits_a^b \tilde{f}$. ∎

I.2.10 Exemple
Montrer que $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)}\mathrm{d}t$ converge. Posons $f : t \mapsto \frac{t-1}{\ln(t)}$ qui est continue sur $]0,1[$ (et donc on a deux études de convergence à faire.)

— Etude en 0. On a $t-1 \underset{0}{\to} -1$ et $\ln(t) \underset{0}{\to} -\infty$ donc $f(t) \underset{0}{\to} 0$ et on peut prolonger f par continuité en 0.

— Etude en 1. On a $\ln(t) \underset{1}{\sim} t-1$ car $\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$. Ainsi $f(t) \underset{1}{\to} 1$ et on peut prolonger f par continuité en 1.

Finalement, $\int_0^1 f$ converge.

II Propriétés des intégrales convergentes

II.1 Généralisation des propriétés

II.1.1 Proposition (Linéarité des intégrales convergentes)

Soient $f, g : [a,b[\to \mathbb{K}$ deux fonctions continues.

Si $\displaystyle\int_a^b f$ et $\displaystyle\int_a^b g$ convergent toutes les deux en b alors pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$, $\displaystyle\int_a^b (\alpha f + \beta g)$ converge également en b et on a

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))\mathrm{d}t = \alpha \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \beta \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$$

Ce résultat est également valable dans le cas où la borne ouverte est la borne inférieure de l'intervalle d'intégration.

Preuve.
Simple retour à la définition. On remplace b par $x \in [a,b[$ pour intégrer sur un segment. La linéarité de l'intégrale s'applique alors et le théorème est une conséquence de du théorème de combinaison linéaire de limites finies. ∎

II.1.2 Remarque

Ce résultat est exactement le même que celui sur les séries convergentes.

II.1.3 Proposition
Soient $f, g : [a,b[\to \mathbb{K}$ deux fonctions continues.

— Relation de Chasles : $\int_a^b f$ converge ssi pour tout $c \in [a,b[$, $\int_c^b f$ converge et alors $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

— Positivité : si $\forall t \in [a,b[\ f(t) \geqslant 0$ et $\int_a^b f$ converge, alors $\int_a^b f \geqslant 0$.

— Croissance : si $\forall t \in [a,b[\ f(t) \leqslant g(t)$ et $\int_a^b f, \int_a^b g$ convergent, alors $\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$.

Les mêmes propriétés sont encore valables pour les intégrales convergentes en la borne inférieure.

Preuve.
Le premier point a été évoqué lors de la définition des intégrales doublement convergentes.

Les deux autres points sont des simples conséquences des mêmes propriétés sur les intégrales sur $[a,x]$ et du passage à la limite des inégalités larges. ■

II.1.4 Borne fermée

Une conséquence importante de la relation de Chasles est que la valeur exacte d'une borne fermée n'a pas d'importance : $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ converge ssi $\int_3^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ converge (ssi $\alpha > 1$).

II.1.5 Théorème
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Soit $f : I \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue, positive et telle que $\int_I f(t)\mathrm{d}t$ converge.

Si $\int_I f = 0$ alors $\forall x \in I\ f(x) = 0$.

Preuve.
Remarquons que si $x \in I$ alors il existe un segment $[a,b] \subset I$ tel que $x \in [a,b]$.

De plus, comme f est positive, $0 \leqslant \int\limits_{[a,b]} f \leqslant \int\limits_I f = 0$

Or ce théorème est vrai quand I est un segment. Pour $x \in I$, il suffit d'appliquer le cours de 1ère année pour prouver que f est nulle sur un segment $[a,b]$ qui contient x et donc $f(x) = 0$. ■

II.2 Les outils de calcul

II.2.1 Théorème
Soient $f \in \mathcal{C}(]a,b[,\mathbb{R})$ et $\varphi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$ une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante.

$\int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u$ sont de même nature et égales quand elles convergent.

Ce théorème s'applique aussi lorsque qu'une des deux bornes est a priori fermée.

Preuve.
Soient $c, d \in]\alpha,\beta[$. On a $\int\limits_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(t)\mathrm{d}t = \int\limits_c^d f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u$ avec $c \to \alpha \iff \varphi(c) \to a$.

Ainsi les intégrales convergent simultanément en a et α. ■

II.2.2 Cas d'un changement décroissant

Si φ est supposée décroissante, on a alors dans le cas de convergence $\int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int\limits_\beta^\alpha f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u$

Le théorème de changement de variable peut servir à prouver la convergence.

II.2.3 Exemple
Convergence et valeur de $I = \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\mathrm{d}t$. $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}$ est continue sur $]0,1[$ par composition et inverse.

Posons $u = \sqrt{t}$ pour $t \in]0,1[$ (qui est bien $\mathcal{C}^1$) et donc on a $t = u^2$ et $\mathrm{d}t = 2u\mathrm{d}u$. Alors $I = \int_0^1 \frac{2u}{u\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}u = 2[\arcsin(u)]_0^1 = \pi$.

II.2.4 Proposition
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{|t-a|^\alpha}$ est intégrable en a ssi $\alpha < 1$.

Preuve.
Pour simplifier l'exposition, considérons l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(t-a)^\alpha}\mathrm{d}t$ pour un $b > a$ réel fixé. La valeur absolue n'a plus lieu d'être, rappelons que la fonction $x \mapsto x^\beta = e^{\beta \ln(x)}$ n'est définie a priori que sur $]0,+\infty[$ et a été prolongée par continuité dans le cas $\beta \geqslant 0$.

On effectue le changement de variable $u = t - a$ ie $t = u + a$ et $\mathrm{d}t = \mathrm{d}u$. L'intégrale considérée est de même nature que $\displaystyle\int_0^{b-a} \frac{1}{u^\alpha}\mathrm{d}u$ qui converge ssi $\alpha < 1$ en tant qu'intégrale de Riemann. ∎

La technique précédente s'applique très souvent lorsque la borne d'étude est un réel non nul : nos intégrales de références sont connues en 0^+.

II.2.5 Théorème (Intégration par parties)
Soient $u, v : [a,b[\to \mathbb{R}$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

Si $\displaystyle\lim_{x \to b^-} u(x)v(x)$ existe et est finie alors $\displaystyle\int_a^b u'v$ et $\displaystyle\int_a^b uv'$ sont de même nature et en cas de convergence

$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$$

où on a noté $[uv]_a^b = \displaystyle\lim_{x \to b^-} u(x)v(x) - u(a)v(a)$.

Preuve.
Immédiat d'après le cours de sup, en passant par des intégrales sur $[a,x]$.

Rappelons tout de même que cette "formule" provient directement de la dérivation du produit : $(uv)' = u'v + uv'$ et donc $u'v = (uv)' - uv'$. ∎

II.2.6 Remarque

On peut étendre ce théorème à $]a,b]$ et même à $]a,b[$ (dans ce cas le crochet est la différence de deux limites).

On reviendra toujours à une intégrale sur un segment $[a,x]$ pour effectuer une intégration par parties puis on fait tendre x vers b. En effet, on ne connaît pas a priori la fonction u ni la limite de uv.

II.2.7 Exemple
Montrer la convergence et calculer $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t}\mathrm{d}t$. $t \mapsto te^{-t}$ est continue sur $[0,+\infty[$.

Posons $A > 0$. Alors $\displaystyle\int_0^A te^{-t}\mathrm{d}t = [-te^{-t}]_0^A + \int_0^A e^{-t} \underset{A \to +\infty}{\to} 1$ qui est une limite finie. Ainsi I converge et vaut 1.

III Fonctions intégrables

III.1 Fonctions positives

III.1.1 Proposition
Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et **positive**.

$\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge ssi $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est une fonction majorée.

Preuve.
Posons $I = [a,b[$. Comme f est continue sur l'intervalle I, $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est une primitive de f sur I.

De plus, $f = F'$ est positive donc F est croissante sur I et admet donc une limite en b^-. Cette limite est finie ssi F est majorée (F ést naturellement minorée par $F(a) = 0$ car c'est une fonction croissante.) ∎

III.1.2 Adaptation à la borne inférieure

Le même résultat vaut encore lorsque $I =]a,b]$ et f est toujours positive, mais il faut considérer $x \mapsto \displaystyle\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$ qui est cette fois décroissante.

III.1.3 Proposition
Soient $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions continues.

Si $\forall t \in [a, b[\ 0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge.

Preuve.
D'après la preuve précédente, pour $x \in [a, b[$ on a $\displaystyle\int_a^x g(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ qui est donc (par croissance de l'intégrale sur un segment) une majorant (indépendant de x) de $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

Le résultat précédent conclut. ■

III.2 Convergence absolue

III.2.1 Définition
Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue. On dit que f est **intégrable** sur I ssi $\int\limits_I |f|$ converge, c'est à dire que $\displaystyle\int_I f$ est absolument convergente.

L'ensemble des fonctions continues et intégrables définies sur l'intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est noté $L^1(I, \mathbb{K})$.

III.2.2 Remarque sur le vocabulaire

Dans la définition précédente

— C'est l'intégrale qui est absolument convergente.

— En revanche, c'est la fonction f qui est intégrable.

III.2.3 Intégrabilité en un point

Toujours avec les notations de la définition précédente :

— Si $I =]a, b]$, on pourra dire que f est intégrable en a lorsque $\displaystyle\int_a^b f$ est absolument convergente.

— Si $I = [a, b[$, on parle de manière similaire d'intégrabilité en b.

III.2.4 Fonctions de signe constant

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est de signe constant, alors la convergence de $\displaystyle\int_I f$ est la même notion que la convergence absolue.

III.2.5 Théorème
Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$. SI f est intégrable sur I ALORS $\int_I f$ converge.

Preuve.

— Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On traite le cas $I = [a, b[$, la preuve s'adapte facilement dans le cas $I =]a, b]$

Notons $f_+ : x \mapsto \max(f(x), 0)$ et $f_- : x \mapsto \min(f(x), 0)$ les fonctions qui valent respectivement $f(x)$ ou 0 suivant que $f(x)$ est positif ou négatif. D'après le cours de 1ère année ces fonctions sont continues (en utilisant $\max(a, b) = \frac{|a-b|+a+b}{2}$)

Alors $f = f_+ + f_-$ et $|f| = f_+ - f_-$. Si on suppose que f est intégrable sur I, c'est à dire que $\displaystyle\int_I (f_+ - f_-)$ converge.

Montrons que $\displaystyle\int_I -f_-$ converge.

Or $-f_- \leqslant |f|$ (car $f_+ \geqslant 0$) et donc $\displaystyle\int_I -f_-$ converge par d'après III.1.3.

Comme $f = |f| + 2f_-$, $\displaystyle\int_I f$ converge par combinaison linéaire.

— Cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Notons $f = u + iv$ la forme algébrique de f. Alors $|u| \leqslant |f|$ et $|v| \leqslant |f|$. Par comparaison de fonctions à valeurs positives (III.1.3), u, v sont d'intégrales convergentes sur I et donc $f = u + iv$ aussi. ■

III.2.6 Exemple

Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^2}\mathrm{d}t$ converge. Le module de l'intégrande est une fonction de Riemann de référence.

III.2.7 Proposition (Inégalité triangulaire)
Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue.

Si f est intégrable sur I alors $\left|\int_I f\right| \leqslant \int_I |f|$.

Preuve.
Il suffit de reprendre la preuve précédente et d'appliquer l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$:

$$\left|\int_I f_+ + \int_I f_-\right| \leqslant \left|\int_I f_+\right| + \left|\int_I f_-\right|$$

et d'observer qu'on intègre maintenant des fonctions de signe constant.

Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la démonstration n'est pas au programme. ■

III.3 Comparaison

III.3.1 Théorème (Comparaison)
Soient $f, g \in \mathcal{C}([a, b[, \mathbb{K})$ des fonctions continues.

1. Si $|f| \leqslant |g|$ au voisinage de b et g est intégrable en b alors f est intégrable en b.
2. Si $f = O_b(g)$ et g est intégrable en b alors f est intégrable en b.
3. Si $f = o_b(g)$ et g est intégrable en b alors f est intégrable en b.
4. Si $f \underset{b}{\sim} g$ alors f est intégrable en b ssi g est intégrable en b.

Le résultat vaut encore pour des fonctions définies sur $]a, b]$, à condition de prouver des relations de comparaison (ou une inégalité) en a.

Preuve.

1. Il s'agit d'une simple traduction sur la convergence absolue du résultat de III.1.3
2. Dans le cas où $f = O_b(g)$ on a $|f| \leqslant M|g|$ au voisinage de b pour un $M \in \mathbb{R}+$ fixé.

   Par produit d'une limite par une constante, $\int\limits_a^b M|g(t)|\mathrm{d}t$ converge et par la point précédent, $\int\limits_a^b |f|$ converge.
3. On a dans ce cas $f = O_b(g)$
4. On a dans ce cas $f = O_b(g)$ et $g = O_b(f)$. ■

En pratique on choisit souvent g positive et pour la rédaction on utilise la tournure : "par comparaison à une fonction positive....".

III.3.2 $t^\alpha f(t)$

1. En 0 Pour la convergence en 0, si $t^{\frac{1}{2}} f(t) \underset{0}{\to} 0$ ou plus généralement $t^{1-\varepsilon} f(t) \underset{0}{\to} 0$ pour un $\varepsilon > 0$ fixé alors l'intégrale de f converge en 0.
2. En $+\infty$ si $t^2 f(t) \underset{+\infty}{\to} 0$ ou plus généralement $t^{1+\varepsilon} f(t) \underset{+\infty}{\to} 0$ alors l'intégrale de f converge en $+\infty$.
3. De manière plus générale, si on peut déterminer $\lim_{0 \text{ ou } +\infty} t^\alpha f(t)$ en fonction de la valeur de α alors on pourra souvent conclure sur la convergence en 0 ou en $+\infty$.

III.3.3 Divergence

On peut tout à fait appliquer les contraposées des points 1 et 2 pour prouver la divergence d'une intégrale d'une fonction positive. Par exemple, si $f = o_b(g)$ et $\int_a^b f$ diverge (avec f positive, fonction de référence), alors g n'est pas intégrable sur I (raisonnement par l'absurde).

III.3.4 Application à la preuve de divergence

En $a = 0$ comme en $a = +\infty$, si on a $tf(t) \underset{t \to a}{\to} +\infty$ on peut conclure à la divergence de l'intégrale de f, une fonction positive ou négative. Par exemple $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln(t)}\mathrm{d}t$ diverge.

III.3.5 Exemple
Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$ converge.

Le calcul de la valeur est un exercice classique.

Preuve.
Voici une preuve en plusieurs étapes.

— Montrons que $\forall x > -1 \ \ln(1 + x) \leqslant x$ (avec égalité seulement en 0).
Remarquons d'abord que $f : x \mapsto \ln(1 + x)$ est dérivable sur $] - 1, +\infty[$, ce qui nous permettra d'utiliser l'inégalité des accroissements finis sur $[0, x]$ ou $[x, 0]$. De plus sa dérivée est $f' : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ qui est décroissante sur $] - 1, +\infty[$

Si $x > 0$, on a $f'(x) \leqslant \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \leqslant f'(0)$ ce qui donne $\frac{\ln(1+x)}{x} \leqslant 1$ qui est CQFD. Si $x < 0$, on a $f'(1) \leqslant \frac{f(0)-f(x)}{0-x} \leqslant f'(x)$ ou encore $1 \leqslant \frac{-\ln(1+x)}{-x}$ ou encore $-x \leqslant -\ln(1+x)$ car $-x > 0$.

— Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et $t \in [0, \sqrt{n}[$, on a alors $\pm\frac{t^2}{n} \in]-1, +\infty[$ et donc $\ln\left(1+\frac{t^2}{n}\right) \leqslant \frac{t^2}{n}$ et $\ln\left(1-\frac{t^2}{n}\right) \leqslant -\frac{t^2}{n}$.

Ainsi, $n\ln\left(1-\frac{t^2}{n}\right) \leqslant -t^2 \leqslant -n\ln\left(1+\frac{t^2}{n}\right)$. En composant par l'exponentielle qui est croissante,

$$\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-t^2} \leqslant \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}$$

— La relations qui précède est encore vraie pour $t = \sqrt{n}$, et en intégrant on obtient :

$$\underbrace{\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t}_{I_1} \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\mathrm{d}t \leqslant \underbrace{\int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t}_{I_2}$$

En posant $t = \sqrt{n}\cos(u)$ dans I_1 (possible d'après les valeurs prises par t), on a $\mathrm{d}t = -\sqrt{n}\sin(u)\mathrm{d}u$ et donc $I_1 = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} -\sqrt{n}\sin^{2n+1}(u)\mathrm{d}u$.

En posant $u = \sqrt{n}\tan(u)$ dans I_2 on obtient $I_2 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{n}\cos^{2n-2}(u)\mathrm{d}u$ car $1+\tan^2 = \frac{1}{\cos^2} = \tan'$.

— Si on note $W_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\mathrm{d}t = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\mathrm{d}t$ (par changement de variable $\frac{\pi}{2}-t$), on a $I_2 \leqslant \sqrt{n}W_{2n-2}$ (car on intègre une fonction positive sur un segment plus petit) et donc

$$\sqrt{n}W_{2n+1} \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{n}W_{2n-2}$$

D'après l'étude des intégrales de Wallis, $W_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ et par encadrement $\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. ■

III.3.6 Proposition
$L^1(I, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel : toute combinaison linéaire de fonctions intégrables est encore intégrable.

Preuve.

1. La fonction nulle est clairement intégrable sur I et son intégrale vaut 0.
2. Soient $f, g \in L^1(I, \mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.
   Montrons que $\lambda f + \mu g$ est encore intégrable. Comme $|\lambda f + \mu g| \leqslant |\lambda||f| + |\mu||g|$ on peut utiliser la linéarité des intégrales convergentes pour conclure. ■

IV Exemples importants

Dans cette partie, nous présentons à la fois des résultats classiques et des exemples d'application des méthodes de ce chapitre

IV.1 Intégrales classiques

IV.1.1 Exemple
Discuter suivant la valeur de $\beta \in \mathbb{R}$ la convergence de de $\int\limits_0^{+\infty} t^{\beta-1}e^{-t}\mathrm{d}t$.

On pose $f_\beta : t \mapsto t^{\beta-1}e^{-t}$ qui est continue sur $]0, +\infty[$ dans le cas général (pas en 0, à cause du cas $\beta - 1 < 0$). Alors $f_\beta(t) = o_{+\infty}(\frac{1}{t^2})$ car $t^2 f_\beta(t) \underset{+\infty}{\to} 0$. Ainsi l'intégrale converge en $+\infty$ par comparaison de fonctions positives.

En 0, on a $f_\beta(t) \sim t^{\alpha-1} = \frac{1}{t^{1-\alpha}}$. L'intégrale converge ssi $\alpha > 0$ d'après le théorème précédent et par comparaison de fonctions positives.

IV.1.2 Fonction Γ

Reprenons IV.1.1. On pose, pour $\beta > 0$, $\Gamma(\beta) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\beta-1}e^{-t}\mathrm{d}t$. Donnons un lien entre $\Gamma(\beta+1)$ et $\Gamma(\beta)$

On a, pour $a > 0$ et $b > a$, $\displaystyle\int_a^b t^\beta e^{-t}\mathrm{d}t = \left[-t^\beta e^{-t}\right]_a^b + \int_a^b \beta t^{\beta-1}e^{-t}\mathrm{d}t$. Comme le crochet tend vers 0 en 0 et $+\infty$ ($\beta > 0$) et que les deux intégrales considérées sont convergentes d'après l'étude de IV.1.1,

$$\Gamma(\beta+1) = \beta\Gamma(\beta).$$

De plus, $\Gamma(1) = 1$ et par récurrence immédiate, $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ $\Gamma(n) = (n-1)!$.

IV.1.3 $\int_I f$ converge mais $\int_I |f|$ diverge

Comme pour les série numérique, ce n'est pas parce que f n'est pas intégrable que l'on peut déduire la divergence de l'intégrale de f. Voir les exemples de séries convergentes mais pas absolument convergentes.

Nous allons démontrer le résultat

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t \text{ converge}, \int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t diverge$$

Posons $f : t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ qui est continue sur $I =]0, +\infty[$. On veut montrer que l'intégrale de f sur I converge mais que f n'est pas intégrable sur I.

1. Montrons que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ converge.
   (a) $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = 1$ par quotient d'équivalents et donc f est prolongeable par continuité en 0 et $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ converge.
   (b) Pour l'intervalle $[1, +\infty[$, nous allons effectuer une intégration par partie. Soit $A > 1$.
   Posons $u : t \mapsto \frac{1}{t}$ et $v' : t \mapsto \sin(t)$ qui sont $\mathcal{C}^1$ sur $[1, A]$. Alors $u' : t \mapsto -\frac{1}{t^2}$ et $v : t \mapsto -\cos(t)$ convient. Par intégration par parties

$$\int_1^A \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos(t)}{t}\right]_1^A - \int_1^A \frac{\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t = \frac{\cos(1)}{1} - \frac{\cos(A)}{A} - \int_1^A \frac{\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t$$

   Nous avons deux limites à étudier.
   — Premièrement $0 \leqslant \left|\frac{\cos(A)}{A}\right| \leqslant \frac{1}{A}$ et donc $\frac{\cos(A)}{A} \underset{A\to+\infty}{\to} 0$ par encadrement.
   — Deuxièmement, $g : t \mapsto \frac{\cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ car $\forall t \geqslant 1$ $|g(t)| \leqslant \frac{1}{t^2}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}$ converge et par comparaison à une fonction positive.
   Ainsi $\displaystyle\int_1^A \frac{\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ possède une limite finie lorsque $A \to +\infty$.

   Par somme, $\displaystyle\int_1^A \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ possède une limite finie lorsque $A \to +\infty$ ie $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ converge.

   Finalement, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ converge.
   Coin culture : cette intégrale s'appelle intégrale de Dirichlet et vaut $\frac{\pi}{2}$, fait qui peut faire l'objet d'un problème.

2. Montrons que f n'est pas intégrable sur I. Supposons au contraire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t$ converge et donc que $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t$ converge.

   Soit $N \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$. Notons $u_N = \displaystyle\int_\pi^{N\pi} \frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t$ (il s'agit d'une suite convergence d'après notre hypothèse). On a

$$u_N = \sum_{k=1}^{N-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t}\mathrm{d}t$$

   Soit $k \in [\![1, N-1]\!]$ et $t \in [k\pi, (k+1)\pi]$. Alors $\frac{1}{t} \geqslant \frac{1}{(k+1)\pi}$ et par produit par $|\sin t| \geqslant 0$, $\frac{|\sin t|}{t} \geqslant \frac{|\sin t|}{(k+1)\pi}$.
   Ainsi, par croissance de l'intégrale

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t}\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{k+1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(t)|\mathrm{d}t.$$

   De plus, si k est pair, $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(t)|\mathrm{d}t = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \sin(t)\mathrm{d}t = 2$ et si k est impair, alors $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(t)|\mathrm{d}t = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} -\sin(t)\mathrm{d}t = 2$.
   Ainsi, par somme d'inégalités, $u_N \geqslant \sum\limits_{k=1}^{N-1} \frac{2}{(k+1)\pi} = \frac{2}{\pi}\sum\limits_{k=2}^{N} \frac{1}{k}$. On reconnaît une somme partielle de la série harmonique (privée de son premier terme), qui est notoirement divergente, ie $u_N \underset{N\to+\infty}{\to} +\infty$. Contradiction.

IV.1.4 $\int_0^{+\infty} f$ converge mais $f \not\to 0$

Nous n'avons pas de critère aussi facile que la divergence grossière des séries pour les intégrales.

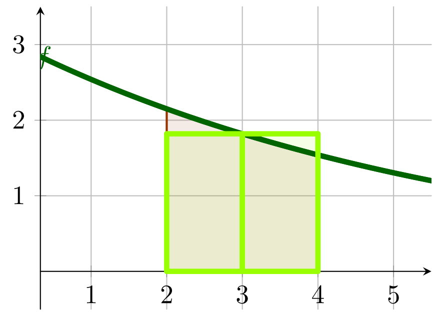
Montrons que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(e^t)\mathrm{d}t$ converge. $f : t \mapsto \sin(e^t)$ est continue sur $[0, +\infty[$. Posons $u = e^t$ et donc $t = \ln(u)$ (ce qui prouve que le changement de variable est bijectif). Alors $\mathrm{d}t = \frac{1}{u}\mathrm{d}u$ et notre intégrale à la même nature que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin(u)\frac{1}{u}\mathrm{d}u$. D'après le point précédent, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(e^t)\mathrm{d}t$ converge.

Cependant, f ne possède pas de limite en $+\infty$ (car $x \mapsto \sin x$ n'a pas de limite en $+\infty$.)

IV.2 Application aux séries numériques

IV.2.1 Théorème
Soit $f : [n_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ (avec $n_0 \in \mathbb{N}$) une fonction **continue, positive et décroissante.**

$$\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t \text{ et } \sum_{n \geqslant n_0} f(n) \text{ ont la même nature}$$



Preuve.
Pour un $N > n_0$ on a, (voir le schéma. La preuve est la décroissance de f et la croissance de l'intégrale, puis on somme des inégalités et on applique la relation de Chasles),

$$\int_{n_0+1}^{N+1} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=n_0}^{N} f(n) \leqslant \int_{n_0}^{N} f(t)\mathrm{d}t.$$

Remarquer les bornes des intégrales, en lien avec le domaine de définition de f

Ainsi la suite des sommes partielle est majorée ssi $x \mapsto \displaystyle\int_{n_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ est majorée (il suffit de majorer les valeurs aux entiers car cette fonction est croissante). ■

IV.2.2 Exemple
On prouve de cette manière la convergence et la divergence des séries de Riemann.

IV.2.3 Application aux séries divergentes

On souhaite donner un équivalent de $\ln(n!) = \sum_{k=2}^{n} \ln(k)$.

Or, pour $k \geqslant 2$, $\displaystyle\int_{k-1}^{k} \ln(t)\mathrm{d}t \leqslant \ln(k) \leqslant \int_{k}^{k+1} \ln(t)\mathrm{d}t$ car ln est croissante sur $[k-1, k]$ et sur $[k, k+1]$.

En sommant de 2 à n on obtient $\displaystyle\int_{1}^{n} \ln(t)\mathrm{d}t \leqslant \ln(n!) \leqslant \int_{2}^{n+1} \ln(t)\mathrm{d}t$ ie $n\ln(n) - n + 1 \leqslant n! \leqslant (n+1)\ln(n+1) - (n+1) - 2\ln(2) + 2$.

On en tire classiquement $\ln(n!) = n\ln(n) - n + o_{+\infty}(n)$.

IV.2.4 Restes d'une série convergente

On cherche un équivalent de $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. Avec $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ on a (cf DM) $S_n + R_n = \frac{\pi^2}{6}$ et donc $|S_n - \frac{\pi^2}{6}| = |R_n|$ où $R_n \underset{n \to +\infty}{\to} 0$. R_n représente en fait la qualité de l'approximation de $\frac{\pi^2}{6}$ par la somme finie S_n.

Pour $k > n$ (on fixe $n \geqslant 1$ pour l'instant), on a classiquement $\displaystyle\int_{k}^{k+1} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k^2} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ et en sommant de $n+1$ à $+\infty$, $\displaystyle\int_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t \leqslant R_n \leqslant \int_{n}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$.

Or $\displaystyle\int_{n}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{n}$ et donc $R_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ (multiplier l'encadrement par n + théorème d'encadrement).

Index