Devoir surveillé n°3

Durée : 4H. Calculatrices interdites. **Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction et la propreté : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.**

Lisez l'énoncé attentivement et en entier **AVANT** de commencer chaque exercice.

Exercice 1 (Questions de cours)

1. On considère une variable aléatoire X suivant une loi géométrique de paramètre p.
   Donner la condition que doit vérifier p, l'ensemble des valeurs de X (noté $X(\Omega)$) ainsi que la probabilité correspondant à chaque valeur.
2. Soit $\lambda > 0$ un nombre réel et Y une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ. Calculer la probabilité de l'événement «Y prend une valeur paire».
3. Calculer les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. A est-elle diagonalisable ?
4. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.
   On admet que A est semblable à une matrice triangulaire de la forme $\begin{pmatrix} 2 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$. Donner la valeur de d.
   Montrer ensuite, par un calcul très simple, que A est inversible.
5. (a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Rappeler le développement en série entière de $(1+x)^\alpha$ ainsi que son domaine de validité.
   (b) Pour $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, calculer $\prod_{k=1}^{n} 2k$ et $\prod_{k=1}^{n} (2k-1)$.
   (c) En déduire le développement en série entière de $\sqrt{1+x}$.

Exercice 2

Partie I : étude d'une matrice

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$

1. Déterminer les valeurs propres de A.
2. Justifier que A est diagonalisable.
3. Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$.
   Les coefficients de la diagonale de D seront classés par ordre croissant et les coefficients de la première ligne de P seront tous positifs. De plus, on impose que la norme de chaque colonne de P soit égale à 1.
   Indication : si $u \neq 0 \in \mathbb{R}^3$ alors $\frac{u}{\|u\|}$ est un vecteur de même direction et de norme 1.
4. Calculer PP^T et en déduire P^{-1}.
5. Démontrer que pour tout entier naturel n, $A^n = PD^nP^{-1}$.
6. Calculer D^nP^{-1} pour tout entier naturel n. On en déduit que

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{2^n}{2} + \frac{4^n}{3} + \frac{1}{6} & \frac{4^n}{3} - \frac{1}{3} & -\frac{2^n}{2} + \frac{4^n}{3} + \frac{1}{6} \\ \frac{4^n}{3} - \frac{1}{3} & \frac{4^n}{3} + \frac{2}{3} & \frac{4^n}{3} - \frac{1}{3} \\ -\frac{2^n}{2} + \frac{4^n}{3} + \frac{1}{6} & \frac{4^n}{3} - \frac{1}{3} & \frac{2^n}{2} + \frac{4^n}{3} + \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Partie II : jouons au golf !

1. Pour jouer au golf, Anna a à sa disposition un seau de balles de golf contenant 44 balles blanches et 4 balles jaunes.
   Au début de chaque trou, Anna tire au hasard une balle dans le seau, note sa couleur, joue le trou puis la remet dans le seau.
   Un parcours de golf comprend 18 trous.
   Soit J la variable aléatoire égale au nombre de balles jaunes utilisées lors de deux parcours.

(a) Reconnaître la loi de J. Une réponse argumentée est attendue.
Préciser $J(\Omega)$ l'ensemble des valeurs prises par J ainsi que la probabilité $P(J=k)$ pour tout k de $J(\Omega)$.

(b) En moyenne, avec combien de balles jaunes Anna a-t-elle joué lors des deux parcours ?

2. Soit J' une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ.

(a) Pour quelle valeur de λ, les variables aléatoires J et J' ont-elle la même espérance ?

(b) Donner la valeur de $P(J'=9)$ et celle de $P(J'\geqslant 1)$ sans signe Σ.
On admet que pour la valeur de λ précédente, $P(J'=k)$ est une valeur approchée de $P(J=k)$ et on donne pour certaines valeurs de k, le tableau de la fonction de répartition F de la variable aléatoire J'.

k	0	1	2	3	4	5	6
$P(J'\leqslant k)$	0.0498	0.1991	0.4232	0.6472	0.8153	0.9161	0.9665

k	7	8	9	10	11	12	13
$P(J'\leqslant k)$	0.9881	0.9962	0.9989	0.9997	0.9999	1	1

(c) Donner alors une valeur approchée des probabilités des événements suivants :
- « Anna a tiré au plus 3 balles jaunes »
- « Anna a tiré 7 balles jaunes »
- « Anna a tiré au moins 10 balles jaunes »

3. Un autre joueur, Anthony, s'entraîne sur le premier trou du parcours.
Il réussit le par [1] sur ce trou s'il rentre la balle dans le trou en exactement 4 coups. Il est au-dessous du par s'il rentre la balle dans le trou en 3 coups maximum et il est au-dessus du par dans les autres cas.
Anthony a constaté que : pour tout entier naturel n,
- si lors du n-ème entraînement, il est au-dessous du par, alors lors de l'entraînement suivant, il reste au-dessous du par avec une probabilité de $\frac{5}{8}$, il réussit le par avec une probabilité de $\frac{1}{4}$ et il est au-dessus du par avec la probabilité de $\frac{1}{8}$.
- si lors du n-ème entraînement, il réussit par, alors lors de l'entraînement suivant, il est au-dessous du par avec une probabilité de $\frac{1}{4}$, il réussit le par avec une probabilité de $\frac{1}{2}$ et il est au-dessus du par avec la probabilité de $\frac{1}{4}$.
- si lors du n-ème entraînement, il est au-dessus du par, alors lors de l'entraînement suivant, il est au-dessous du par avec une probabilité de $\frac{1}{8}$, il réussit le par avec une probabilité de $\frac{1}{4}$ et il reste au-dessus du par avec la probabilité de $\frac{5}{8}$.

On note A_n , B_n et C_n les événements « Anthony est au-dessous du par lors du n-ème l'entraînement » , « Anthony réussit le par lors du n-ème l'entraînement » et « Anthony est au-dessus du par lors du n-ème l'entraînement » et a_n , b_n et c_n leurs probabilités respectives.
Lors du dernier échauffement, considéré comme l'entraînement numéro 0, Anthony réussit le par.
On a donc $a_0=c_0=0$ et $b_0=1$.

(a) Donner les valeurs de a_1, b_1 et c_1.

(b) Donner les valeurs des probabilités conditionnelles : $P_{A_n}(A_{n+1}), P_{B_n}(A_{n+1})$ et $P_{C_n}(A_{n+1})$.
Chaque valeur devra être justifiée par une phrase, éventuellement extraite de l'énoncé.

(c) Établir que pour tout entier naturel n que $a_{n+1}=\frac{5}{8}a_n+\frac{1}{4}b_n+\frac{1}{8}c_n$.

(d) Exprimer de même b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n. Aucun justification n'est demandée.

Pour tout entier naturel n, on pose $G_n=\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

(e) Donner une relation entre G_{n+1}, G_n et la matrice A de la première partie.

(f) Écrire les commandes `Python` permettant de calculer et d'afficher la probabilité qu'Anthony réussie le par lors du 20-ème entraînement. On pourra utiliser numpy si besoin, en considérant que ce module est déjà importé.

(g) Donner sans démonstration la relation entre G_n, G_0, A et n.

(h) En déduire les valeurs de a_n, b_n et c_n en fonction de n.

(i) Que valent $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n$?
Interpréter ces résultats.

1. NDT : terme technique en golf. Indique le nombre de coup attendu pour réussir le trou en question.

Exercice 3
On considère la suite de Fibonacci (F_n) définie par $F_0 = 1, F_1 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

On pose de plus, pour des valeurs de x convenables,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^n \text{ et } T(x) = \sum_{n=0} +\infty \frac{F_n}{n!} x^n$$

Partie I : étude de S

Le but de cette partie est de trouver une expression de F_n en fonction de n sans utiliser la méthode sur les suites d'ordre 2.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*\ 1 \leqslant \frac{F_{n+1}}{F_n} \leqslant 2$.
2. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*\ 1 \leqslant F_n \leqslant 2^n$
3. On note R_S le rayon de convergence de la série entière dont S est la somme. Montrer que $R_S \geqslant \frac{1}{2}$.
4. Montrer que pour $x \in]-R_S, R_S[$ on a
$$(1 - x - x^2)S(x) = x$$
5. On pose $\varphi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\varphi_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
   (a) Calculer $(1 - x\varphi_1)(1 - x\varphi_2)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (b) Déterminer les valeurs de $a, b \in \mathbb{R}$ telles que
$$\frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{a}{1 - x\varphi_1} + \frac{b}{1 - x\varphi_2}$$
6. Donner le développement en série entière de $\frac{x}{1-x-x^2}$ en précisant le domaine de convergence.
7. En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N}\ F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi_1^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi_2^n$$

Partie II : étude de T

1. Donner un équivalent de F_n lorsque $n \to +\infty$ et en déduire le rayon de convergence de la série entière dont la somme est la fonction T.
2. Montrer que pour des valeurs de x convenables
$$T(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}(e^{x\varphi_1} - e^{x\varphi_2})$$
3. En déduire que
$$T(x)e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{F_{2n}}{n!} x^n$$
   (a) Soient f, g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle I. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a
$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^(k) \times g^{(n-k)}$$
   où on considère ici la dérivée d'ordre n.
   (b) Donner pour tout $k \in \mathbb{N}$ la valeur de $T^{(k)}(0)$
   (c) Déduire des questions précédentes que
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k = F_{2n}$$