Devoir maison n°10

A rendre le 17/01/2023

Exercice 1
On considère la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \left\{ e^{-t} \right. \end{array} \right.$ et la fonction $F : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t \end{array} \right.$.

1. (a) Donner un lien entre F et f.
   (b) Justifier que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge et donner sa valeur.
   (c) Donner une tableau de variations complet de F (incluant les limites éventuelles).
2. On veut poser une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}\ P(X = k) = F(k+1) - F(k)$$

   (a) Vérifier qu'on a bien $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) = 1$. Ainsi, on a bien définit la loi d'une variable X.
   (b) On pose $T = X + 1$. Vérifier que T suit la loi géométrique de paramètre $1 - \frac{1}{e}$.
   (c) Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
3. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & X \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que M est diagonalisable ssi $X \neq 1$.
   (b) Donner la probabilité pour que M soit diagonalisable.
   (c) $\mathrm{tr}(M)$ est une variable aléatoire déjà étudiée. Laquelle ? Calculer $\mathrm{cov}(X, \mathrm{tr}(M))$.

Indications

1. (a) Cf le cours, théorème fondamental du calcul différentiel.
   (b) Définition
   (c) Conséquence des deux premières questions
2. (a) On peut utiliser l'expression de $F(x)$ ou seulement la valeur de sa limite.
   (b) Pour n à préciser, $(T = n) \iff (X = \dots)$
   (c) Application des propriétés
3. (a) Traiter deux cas : X prend la valeur 1 et X prend la valeur $a \neq 1$.
   (b) Revenir à la définition de cov. Pour le calcul de $E(X^2)$ on pourra s'aider de la question 2 c.