Intégrales sur un segment : révisions

Exercice 1 (Les incontournables)
Calculer directement une primitive de (on précisera l'intervalle) :

1. $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
2. $x \mapsto \sqrt[42]{x}$
3. $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$
4. $x \mapsto e^{i\pi x+\sqrt{729}x}$
5. $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$
6. $x \mapsto \frac{1}{(2x+7)^2+1}$
7. $x \mapsto \cos(e^2x - 728435)$
8. $x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{x}\sqrt{\sqrt{x}}}$
9. $w \mapsto -3w + \mathrm{ch}(4w)$

Exercice 2
Donner des primitives, en précisant l'intervalle, de :

1. $x \mapsto xe^{-2x^2}$
2. $x \mapsto \frac{x^2}{1+x^3}$
3. $x \mapsto \frac{\ln(\ln(x))}{x}$
4. $x \mapsto \exp(e^x + x)$
5. $x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)\sqrt{\tan(x)}}$
6. $x \mapsto \frac{1}{x\ln^2(x)}$
7. $x \mapsto \tan^2(x)$
8. $x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{2+\ln(3x)}}$
9. $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$

Exercice 3
Calculer

1. $\displaystyle\int^x \sin(t)e^{2t}\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int^x \sin(t)\,\mathrm{sh}(t)\mathrm{d}t$

Rappelons que cette notation signifie qu'on veut obtenir une primitive quelconque (en choisissant une constante arbitraire, souvent 0 par rapport au calcul) et qu'elle est justifiée par le théorème fondamental du calcul différentiel indiquant que $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est une primitive de f dès que f est continue sur un intervalle contenant a.

Exercice 4
Sans utiliser les propriétés de ln, montrer que pour $a, b > 0$ on a $\int\limits_1^{ab} \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \int\limits_1^{a} \frac{1}{t}\mathrm{d}t + \int\limits_1^{b} \frac{1}{t}\mathrm{d}t$.

Exercice 5
Calculer, en changeant de variable

1. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin(t)}\mathrm{d}t$ avec $u = \cos(t)$
2. $\int \frac{1}{\mathrm{ch}(x)}\mathrm{d}x$ avec $t = e^x$.
3. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{\ln(u)}{1+u^2}\mathrm{d}u$ avec $t = \frac{1}{u}$.
4. $\int\limits_{-1}^{1} t^2\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t$ avec $t = \sin(\theta)$.

Exercice 6 (Intégrales de Wallis)
Nous allons étudier plus précisément la suite $u_n = \binom{2n}{n}$. Une manière classique est d'étudier $I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}\ I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}I_n$.
   Indication : une méthode très classique pour obtenir une relation de récurrence sur des intégrales est d'effectuer une intégration par parties.
3. Calculer I_0 et exprimer I_{2p} en fonction de I_0 pour tout $p \in \mathbb{N}$. On attend une expression faisant intervenir u_p.
4. Calculer I_1 et exprimer I_{2p+1} en fonction de I_1 pour tout $p \in \mathbb{N}$.
5. Montrer, en utilisant les questions 1 et 2, que $I_{2p+1} \underset{p\to+\infty}{\sim} I_{2p}$.
6. Donner un équivalent de u_p.

Convergence

Exercice 7
Etudier la convergence des intégrales :

1. $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t}$ sur $]0,1]$
2. $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^2}$ sur $[1,+\infty[$.
3. $t \mapsto \sqrt{1+t^2} - t$ sur $[0,+\infty[$.
4. $t \mapsto e^{-\ln(t)^2}$ sur $[1,+\infty[$
5. $t \mapsto e^{-t\arctan(t)}$ sur $[0,+\infty[$.
6. $t \mapsto \frac{e^{\sin(t)}}{t}$ sur $[1,+\infty[$.
7. $t \mapsto \frac{\sqrt{\ln(t)}}{(t-1)\sqrt{t}}$ sur $]1,+\infty[$.
8. $t \mapsto e - \left(1+\frac{1}{t}\right)^t$ sur $[1,+\infty[$

Exercice 8
Etudier la convergence et calculer le cas échéant :

1. $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}$.
2. $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$.
3. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{(t+1)(t+2)}\mathrm{d}t$
4. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{e^t-1}\mathrm{d}t$.

Plus technique

Exercice 9
Calculer, **après** avoir prouvé leurs convergences :

1. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}\mathrm{d}t$
2. $\int\limits_0^{1} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$
3. $\int\limits_0^{1} \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}\mathrm{d}x$
4. $\int\limits_0^{1} \frac{\ln(t)}{(1+t)^2}\mathrm{d}t$

Exercice 10
Soit $f \in \mathcal{C}([0,+\infty[,\mathbb{R})$ une fonction intégrable. Montrer que $\int\limits_x^{x+1} f(t)\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\to} 0$.

Exercice 11
1. Montrer que $\int\limits_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t$ converge mais pas $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t$.

   On pose maintenant $f : \left\{ \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t \end{array} \right.$.
2. Donner un équivalent de f en 0. Indication : au choix une intégration par parties ou une série entière (après avoir ramené l'étude à un intervalle de longueur fini).
3. Après avoir montré que $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\mathrm{d}t = o_{+\infty}\left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t\right)$, donner un équivalent de f en $+\infty$ en effectuant une intégration par parties.

Avec des paramètres

Exercice 12
Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que $\int\limits_0^{+\infty} \frac{t-\sin(t)}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ converge.

Exercice 13
Soit $a > 0$.

1. Justifier que $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+a^2}\mathrm{d}t$ est une intégrale impropre convergente.
2. Dans cette question seulement, on pose $a = 1$. Montrer que l'intégrale précédente est nulle grâce au changement de variable $u = \frac{1}{t}$
3. Calculer $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+a^2}\mathrm{d}t$.

Exercice 14
Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $I_n = \int\limits_0^{1} (\ln(t))^n\mathrm{d}t$. Justifier la convergence et calculer I_n en fonction de n.

Exercice 15
Calculer $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2n}e^{-t^2}\mathrm{d}t$ en sachant que $I_0 = \sqrt{\pi}$.

Exercice bilan

Exercice 16
Pour $k,p \in \mathbb{N}$ on pose $f_{p,k} : t \mapsto x^p(\ln(x))^k$ définie sur $]0,1]$.

1. Montrer que $f_{p,k}$ est intégrable sur $]0,1]$.

   On pose alors $K_{p,k} = \displaystyle\int_0^1 t^p(\ln(t))^k\mathrm{d}t$.
2. Calculer $K_{p,0}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.
3. Exprimer $K_{p,k}$ en fonction de $K_{p,k-1}$ pour $k \geqslant 1$.
4. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $J_n = K_{n,n} = \displaystyle\int_0^1 (t\ln(t))^n\mathrm{d}t$.
5. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 t^t\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$