Théorème 1
Soit I un intervalle non vide et non réduit à un point.

Soit $S : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si

— Il existe des fonctions $f_n : I \to \mathbb{R}$ continues et intégrables sur I telles que

$$\forall t \in I\ S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$$

(la convergence de la série pour chaque valeur de $t \in I$ fait partie de l'hypothèse à vérifier)

— La série $\sum \int_I |f_n(t)| \mathrm{d}t$ converge

Alors S est intégrable sur I et

$$\int_I S(t) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) \mathrm{d}t.$$

Preuve.
Hors programme. ∎

Exemple 1
Montrer la convergence et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} \mathrm{d}t$.

1. Vérification de la continuité de S et préciser l'intervalle I (ses bornes sont-elles ouvertes ?)
   $S : t \mapsto \frac{t}{e^t-1}$ est continue sur $I =]0, +\infty[$ et prolongeable par continuité en 0.
2. Trouver une série dont $S(t)$ est la somme.
   Pour $t \in]0, +\infty[$, $\frac{1}{e^t-1} = e^{-t} \frac{1}{1-e^{-t}}$ et $e^{-t} \in]0, 1[$. Ainsi

$$S(t) = te^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-t})^n = \sum_{n=0}^{+\infty} te^{-(n+1)t}$$

3. Vérifier que f_n est continue et intégrable sur I, calculer $u_n = \displaystyle\int_I |f_n|$ et montrer que $\sum u_n$ converge
   Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : te^{-(n+1)t}$ définies et continues sur I. f_n est intégrable en 0 par prolongement par continuité
   Alors, pour $t \in [0, +\infty[$, $|f_n(t)| = te^{-(n+1)t}$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$

$$\int_0^x te^{-(n+1)t} \mathrm{d}t = [-\frac{t}{n+1} e^{-(n+1)t}]_0^x + \int_0^x \frac{1}{n+1} e^{-(n+1)t} \mathrm{d}t$$

   Par croissances comparées et somme $\displaystyle\int_0^1 |f_n| = \frac{1}{(n+1)^2}$.
   Ainsi $\sum \displaystyle\int_0^1 |f_n|$ converge par car c'est une série de Riemann convergente.
4. Conclusion
   Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} \mathrm{d}t$ converge et

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} te^{-(n+1)t} \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Remarque

— Ce théorème peut s'appliquer à des séries qui ne sont pas des séries entières.

— Le point délicat est le point 3. Il faut vérifier l'intégrabilité (intégrales absolument convergentes) puis la convergence d'une série numérique (à termes positifs : comparaison, d'Alembert, calcul des sommes partielles)

Exemple 2
Montrer la convergence et donner une expression de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1 + t} \mathrm{d}t$.