

Table des matières

- I Produit scalaire et norme** **1**
- I.1 Produit scalaire 1
- I.2 Norme et distance 1
- II Orthogonalité** **2**
- II.1 Familles orthogonales 2
- II.2 Bases orthonormées 3
- II.3 Orthogonal d'un sev 4
- III Matrices particulières** **5**
- III.1 Matrices orthogonales 5
- III.2 Matrices symétriques réelles 6
- III.3 Théorème spectral 7
- III.4 Trouver une base orthonormée 8
- IV Coniques** **9**
- IV.1 Équation de conique 9
- IV.2 Réduction d'une conique 9

Dans tout le chapitre, on s'intéresse exclusivement aux espaces \mathbb{R}^n où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Notations : le produit scalaire canonique est noté au choix $(u|v)$, $\langle u, v \rangle$, ou $u \cdot v$.

Preuve.

La bilinéarité est évidente par la formule de produit matriciel.

De plus, $X^T Y$ est un nombre donc $(X^T Y)^T = Y^T X = \langle Y, X \rangle$.

Remarquer que $\langle X, X \rangle = \sum_{k=1}^n x_k^2$ est une somme de réels positifs donc est forcément positive, et elle ne vaut 0 que si tous les termes sont nuls. ■

I.1.2 Exemple

Les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ sont de produit scalaire nuls dans \mathbb{R}^4 .

I.2 Norme et distance

I.2.1 Définition

1. On appelle norme (euclidienne) d'un vecteur $u \in \mathbb{R}^n$ le réel positif $\|u\| = \sqrt{(u|u)}$.
2. On appelle distance (euclidienne) entre deux vecteurs $u, v \in \mathbb{R}^n$ le réel positif $d(u, v) = \|v - u\| = \|u - v\|$.

I Produit scalaire et norme

I.1 Produit scalaire

I.1.1 Définition-Proposition

Le produit scalaire canonique de deux vecteurs $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ est défini

par

$$(X|Y) = \langle X, Y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k = X^T Y$$

Il possède les propriétés suivantes :

1. Bilinéaire : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \forall u, v, w \in \mathbb{R}^n (\lambda u + \mu v | w) = \lambda(u|w) + \mu(v|w)$ et $(u | \lambda v + \mu w) = \lambda(u|v) + \mu(u|w)$.
2. Symétrique : $\forall u, v \in \mathbb{R}^n (u|v) = (v|u)$.
3. Positive : $(u|u) \geq 0_{\mathbb{R}}$.
4. Définie : $(u|u) = 0_{\mathbb{R}} \Rightarrow u = 0_{\mathbb{R}^n}$.

I.2.2 Proposition

Soient $u, v \in \mathbb{R}^n$

1. $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2(u|v) + \|v\|^2$
2. $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$ (identité du parallélogramme)
3. $(x|y) = \frac{\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2}{2} = \frac{\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2}{4}$

Preuve.

1. Par définition on a

$$\|u + v\|^2 = \langle u + v, u + v \rangle = \langle u, u + v \rangle + \langle v, u + v \rangle = \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle$$

et il suffit de regrouper.

2. Changer v en $-v$ dans la formule précédente puis sommer (en utilisant la linéarité du produit scalaire)

3. Simple transformation de formules. ■

I.2.3 Théorème (Inégalité de Cauchy-Schwarz)Soient $u, v \in \mathbb{R}^n$.

$$|(u|v)| \leq \|u\| \|v\|$$

Il y a égalité si et seulement si u et v sont colinéaires.**Preuve.**Soient $u, v \in \mathbb{R}^n$ fixés.On considère l'application $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto (u + tv|u + tv) \end{cases}$.Alors $f \geq 0$ par positivité du produit scalaire. De plus, pour $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} f(t) &= (u + tv|u + tv) = (u|u + tv) + t(v|u + tv) = (u|u) + t(u|v) + t(v|u) + t^2(v|v) \\ &= \|u\|^2 + 2t(u|v) + t^2\|v\|^2 \end{aligned}$$

Ainsi f est une fonction polynomiale de degré au plus 2.

- Si $v \neq 0$ (ie $\|v\| \neq 0$), alors f est polynomiale de degré 2 et positive. Donc son discriminant est négatif : $\Delta = 4(u|v)^2 - 4\|u\|^2\|v\|^2 \leq 0$, ce qui est l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
- Si $v = 0$, alors $(u|v) = 0$ et donc l'inégalité est vérifiée.

Dans le cas, $v \neq 0$, l'inégalité est une égalité ssi $\Delta = 0$ ssi f s'annule une fois ssi $\exists t \in \mathbb{R} \ u + tv = 0_{\mathbb{R}^n}$ (norme nulle). Ainsi u et v sont colinéairesDans le cas $v = 0$, l'égalité est tout le temps vérifiée, tout comme le fait d'être colinéaire à 0. ■**I.2.4 Exemple**

$$\sum_{k=1}^n k\sqrt{k} \leq \frac{n(n+1)}{2} \sqrt{\frac{2n+1}{3}} \text{ en prenant } X = \begin{pmatrix} \sqrt{1} \\ \vdots \\ \sqrt{n} \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}.$$

I.2.5 Corollaire (Minkowski)Soient $u, v \in \mathbb{R}^n$.

1. $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ avec égalité ssi u et v sont colinéaires de même sens (positivement proportionnels).
2. $|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\|$

Preuve.

On a immédiatement, d'après Cauchy-Schwarz

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2(u|v) + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2$$

Comme la fonction racine carré est croissante sur \mathbb{R}_+ , on a l'inégalité voulue.Il y a égalité ssi $(u|v) = \|u\|\|v\|$. Dans ce cas, on a d'après le théorème I.2.3, $u = \lambda v$ ou $v = 0$ et donc $\lambda\|v\|^2 = |\lambda|\|v\|^2$, ie $v = 0$ ou $\lambda \geq 0$. Dans les deux cas, u et v sont colinéaires de même sens. La réciproque est immédiate par le même calcul.Pour le deuxième point, on applique l'inégalité triangulaire à $\|(u - v) + v\|$ et à $\|(v - u) + u\|$. ■**I.2.6 Remarque**

Faire un dessin : inégalité triangulaire.

I.2.7 Proposition (Propriétés de la norme)Soit $u, v \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. $\|u\| = 0_{\mathbb{R}} \iff u = 0_{\mathbb{R}^n}$
2. $\|\lambda u\| = |\lambda|\|u\|$
3. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

II Orthogonalité**II.1 Familles orthogonales****II.1.1 Définition**Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Soient $u, v, u_1, \dots, u_n \in E$

1. On dit que u est unitaire, ou normé ssi $\|u\| = 1$.
2. u et v sont dits orthogonaux ssi $(u|v) = 0$. On note $u \perp v$.
3. (u_1, \dots, u_n) est dite orthogonale ssi les u_i sont orthogonaux deux à deux.
4. (u_1, \dots, u_n) est dite orthonormale ssi elle est orthogonale et tous les u_i sont unitaires. Autrement dit $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \ (u_i|u_j) = \delta_{i,j}$.

Explication La notion d'orthogonalité repose maintenant sur le produit scalaire, contrairement à nos habitudes de 1ère année. On a pas du tout de notion d'angle.

II.1.2 Exemple

Montrer que la base canonique de \mathbb{R}^n est orthonormale pour le produit scalaire canonique.

II.1.3 Passer à une famille orthonormale

Soit (e_1, \dots, e_p) une famille de vecteurs orthogonaux tous non nuls. Alors $(\frac{e_1}{\|e_1\|}, \dots, \frac{e_p}{\|e_p\|})$ est une famille orthonormale.

II.1.4 Proposition

Soit $(u_i)_{i \in [1,p]}$ une famille de vecteurs de \mathbb{R}^n orthogonaux deux à deux et **tous non nuls**. Alors $(u_i)_{i \in [1,p]}$ est libre.

Preuve.

Supposons que $\sum_{i=1}^p \lambda_i u_i = 0_E$. Alors en effectuant le produit scalaire par u_i on obtient $\lambda_i \|u_i\|^2 = 0$ (tous les autres termes sont nuls), d'où $\lambda_i = 0$. ■

II.1.5 Théorème (Pythagore)

Soit (u_1, \dots, u_p) une famille orthogonale de \mathbb{R}^n .

$$\left\| \sum_{i=1}^p u_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^p \|u_i\|^2$$

Preuve.

On calcule cette fois $\langle \sum_{i=1}^n u_i, \sum_{j=1}^n u_j \rangle$ (noter le choix des indices muets différents, pour permettre le calcul de bilinéarité).

Il s'agit simplement de développer les deux sommes et identifier les termes nuls (tous, sauf lorsque les deux vecteurs concernés sont égaux). ■

II.2 Bases orthonormées

II.2.1 Théorème

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base **orthonormale** de \mathbb{R}^n . Soient $u, v \in E$.

- $u = \sum_{i=1}^n (u|e_i)e_i$, c'est à dire que la coordonnée¹ de u sur le vecteur e_i est $(u|e_i)$.
- On note (x_1, \dots, x_n) les coordonnées de u dans \mathcal{B} et (y_1, \dots, y_n) les coordonnées de v dans \mathcal{B} . Alors

$$(u|v) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \text{ et } \|u\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n (x|e_i)^2$$

- Si on note $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $Y = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ (les colonnes des coordonnées), $(u|v) = X^T Y$.

Preuve.

- On a $u = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$. Ainsi $(u|e_1) = x_1 (e_1|e_1) + x_2 (e_2|e_1) + \dots + x_n (e_n|e_1) = x_1$ (par linéarité du produit scalaire et orthogonalité de la famille).
- On a par le même calcul $(u|v) = \sum_{i=1}^n y_i (x|e_i) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. ■

II.2.2 Exemple

Montrer que la famille $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), (\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ est une base orthonormale directe de \mathbb{R}^2 (pour le produit scalaire canonique).

Donner les coordonnées de $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans cette base. Faire le lien avec les matrices de passage.

II.2.3 Corollaire

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base **orthonormée** de \mathbb{R}^n . Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. On note $A = (a_{i,j})_{i,j \in [1,n]} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Alors $\forall (i, j) \in [1, n]^2$ $a_{i,j} = (f(e_j)|e_i)$.

Preuve.

On a en effet, pour un $j \in [1, n]$ fixé $f(e_j) = \sum_{i=1}^n (f(e_j)|e_i)e_i$ d'après le théorème précédent. ■

II.2.4 Mnémotechnie

Pour calculer la matrice de f dans \mathcal{B} , *a priori* on calcule les coordonnées de $f(e_j)$ pour trouver la j ème colonne. Utile pour se souvenir sur quel indice porte l'application de f .

II.3 Orthogonal d'un sev

II.3.1 Définition

Soient F, G deux sous-espaces de \mathbb{R}^n .

1. On dit que $u \in E$ est orthogonal à F ssi $\forall u_F \in F (u|u_F) = 0$. On le note $u \perp F$
2. F et G sont dits orthogonaux ssi $\forall (u_F, u_G) \in F \times G (u_F|u_G) = 0$. On note $F \perp G$

II.3.2 Exemple

Trouver un exemple dans \mathbb{R}^2 muni du produit scalaire canonique. Preuve avec les bases, avec les équations.

II.3.3 Remarque

Si $F \perp G$ alors $F + G = F \oplus G$ car le seul vecteur orthogonal à lui même est le vecteur nul.

II.3.4 Proposition

Soient F, G deux sous-espaces de \mathbb{R}^n . On suppose que $F = \text{Vect}(f_1, \dots, f_r)$ et $G = \text{Vect}(g_1, \dots, g_s)$.

1. Soit $u \in E$, $u \perp F$ ssi $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket u \perp f_i$.
2. $F \perp G$ ssi $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket \forall j \in \llbracket 1, s \rrbracket f_i \perp g_j$.

Il suffit de vérifier l'orthogonalité sur une famille génératrice pour prouver l'orthogonalité à un espace.

Preuve.

1. Si $x_F \in F$ alors $x_F = \sum_{i=1}^r \alpha_i f_i$ et on a $(u|x_F) = \sum_{i=1}^r \alpha_i (u|f_i)$. Ceci prouve facilement la seule implication non triviale.
2. \Rightarrow est triviale. Pour la réciproque, on a d'après le point précédent $f_i \perp G$ pour tout i . Par linéarité du produit scalaire, tout $u_F \in F$ est alors perpendiculaire à G , par le même calcul qu'au point précédent. ■

II.3.5 Définition

Soit F un sev de \mathbb{R}^n . L'orthogonal de F est $F^\perp = \{x \in E | \forall x_F \in F (x_F|x) = 0\}$. F^\perp est l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tous les éléments de F .

II.3.6 Remarque

Si on a $G \perp F$ pour deux espaces alors, par définition de F^\perp , $G \subset F^\perp$.

II.3.7 Exemple

1. $\{0\}^\perp = E$, $E^\perp = \{0\}$.
2. Calculer l'orthogonal de la droite d'équation $y = x$ dans \mathbb{R}^2 .

II.3.8 Attention

On considère D une droite de l'espace et F un sev de \mathbb{R}^3 . On peut avoir $D \perp F$ sans que $F = D^\perp$. En particulier deux droites peuvent être orthogonales, mais l'orthogonal de D est un plan.

II.3.9 Proposition

Soit F un sev de \mathbb{R}^n .

1. F^\perp est un sous-espace de \mathbb{R}^n .
2. $F \oplus F^\perp = \mathbb{R}^n$ ie F et F^\perp sont supplémentaires dans \mathbb{R}^n .
3. F^\perp est le seul supplémentaire de F qui lui soit orthogonal. On l'appelle le supplémentaire orthogonal de F .

Preuve.

Le seul vecteur orthogonal à lui même est $0_{\mathbb{R}^n}$ et donc $F \cap F^\perp = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

Montrons que F^\perp est un sous-espace de \mathbb{R}^n et que $\dim(F^\perp) = n - \dim(F)$. Soit

$$\mathcal{B}_F = (e_1, \dots, e_r) \text{ une base de } F \text{ et } f : \begin{cases} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^r \\ u \mapsto \begin{pmatrix} \langle u, e_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle u, e_r \rangle \end{pmatrix} \end{cases}.$$

Par linéarité de chaque coordonnées, $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^r)$ et $F^\perp = \ker(f)$ d'après II.3.4. Ainsi F^\perp est un sous-espace de \mathbb{R}^n .

Considérons \mathcal{B}_n la base canonique de \mathbb{R}^n et \mathcal{B}_r la base canonique de \mathbb{R}^r . Notons $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}_n, \mathcal{B}_r}(f)$. Alors les lignes de M sont les coordonnées des e_i , notées en lignes. Ainsi elles forment une famille libre et $\text{rg}(M) = \text{rg}(f) = r$.

D'après le théorème du rang, $\text{rg}(f) = n - \dim(\ker(f))$ et donc $\dim(F^\perp) = n - r$ comme voulu.

Ainsi $F \oplus F^\perp = \mathbb{R}^n$.

Finalement, si G est un supplémentaire de F tel que $G \perp F$ alors $G \subset F^\perp$ par définition de F^\perp et $\dim(G) = \dim(F^\perp)$ (en tant que supplémentaires d'un même espace F) et donc $G = F^\perp$ ce qui prouve l'unicité voulue. ■

II.3.10 Exemple

1. Calculer le supplémentaire orthogonal de $D : 2x - y = 0$ (dans \mathbb{R}^2).

2. Dans \mathbb{R}^3 , même question avec $D = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $P : 2x + z = 0$.

II.3.11 Exemple

Projection et symétrie dans le cas où $G = F^\perp$: illustration et traduction des conditions géométriques pour calculer p .

III Matrices particulières

III.1 Matrices orthogonales

III.1.1 Définition

Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. On dit que M est orthogonale ssi $MM^T = I_n$. On a alors $M^T M = I_n$ et donc $M \in GL_n(\mathbb{R})$ et $M^{-1} = M^T$.

On note $O(n)$ ou $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonale de taille n .

III.1.2 Produit matriciel et produit scalaire

Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Notons $C = AB$ et $a_{i,j}, b_{i,j}, c_{i,j}$ les coefficients de A, B et C respectivement.

Alors, pour $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}$.

Notons de plus L_1, \dots, L_n les colonnes de A et C_1, \dots, C_n les lignes de B . Alors

$$L_i = (a_{i,1} \ a_{i,2} \ \dots \ a_{i,n}) \text{ et } C_j = \begin{pmatrix} b_{1,j} \\ \vdots \\ b_{n,j} \end{pmatrix}. \text{ Ainsi } c_{i,j} = L_i C_j = \langle L_i^T, C_j \rangle.$$

III.1.3 Théorème

Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $M \in O_n(\mathbb{R})$.
2. $M^T \in O_n(\mathbb{R})$.

3. Les colonnes de M sont une BON de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire canonique.
4. Les lignes de M sont une BON de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire canonique.
5. Pour toutes colonnes $X, Y \in \mathbb{R}^n$ on a $\langle MX, MY \rangle = \langle X, Y \rangle$.
6. Pour toute colonne $X \in \mathbb{R}^n$ on a $\|MX\| = \|X\|$

Preuve.

- On a clairement 1) \iff 2).
- D'après le point précédent, $M^T M = I_n$ ssi $\langle C_i, C_j \rangle = \delta_{i,j}$ (symbole de Kronecker) en notant C_1, \dots, C_n les colonnes de M . Ainsi 1 \iff 3).
- Grâce à 1) \iff 2) on a 3) \iff 4) immédiatement.
- Soient $X, Y \in \mathbb{R}^n$. A priori $\langle MX, MY \rangle = (MX)^T MY = X^T M^T MY$. Ainsi, si $M \in O_n(\mathbb{R})$ on a bien $\langle MX, MY \rangle = \langle X, Y \rangle$. Réciproquement, supposons que $\langle MX, MY \rangle = \langle X, Y \rangle$ pour toute colonne X, Y . En notant E_1, \dots, E_n la base canonique de \mathbb{R}^n (sous forme de colonnes) on a $E_i^T (M^T M) E_j = \delta_{i,j}$ (car la base canonique est orthonormée). Or pour une matrice $A = (a_{i,j})$, $E_i^T A E_j = a_{i,j}$ par calcul direct. Ainsi $M^T M = I_n$. On a bien 1) \iff 5).
- 5) \implies 6) est trivial. La réciproque est la conséquence directe de l'identité de polarisation $\langle X, Y \rangle = \frac{\|X+Y\|^2 - \|X\|^2 - \|Y\|^2}{2}$ ■

III.1.4 Exemple

1. $I_n, A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$. Calculer A^{-1} .

2. $\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & 3 & -2 \\ -2 & 6 & 3 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

3. Quelle est la méthode la plus efficace pour vérifier qu'une matrices est orthogonale ?

III.1.5 Proposition

Soit \mathcal{B} une base de \mathbb{R}^n . On note \mathcal{B}_c la base canonique de \mathbb{R}^n .

\mathcal{B} est une base orthonormée ssi $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{B})$ (la matrice de passage) est orthogonale.

Preuve.

Simple traduction du théorème précédent.

III.1.6 Changement de bases orthonormales

Soit \mathcal{B} une BON de \mathbb{R}^n et $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{B})$ la matrice de passage de \mathcal{B}_c à \mathcal{B} .
Pour $X \in \mathbb{R}^n$, on note $X' = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(X)$ sa colonne de coordonnées dans \mathcal{B} . Alors

$$X = PX' \text{ ie. } X' = P^{-1}X = P^T X$$

III.1.7 Proposition

L'inverse d'une matrice orthogonale est orthogonale et le produit de deux matrices orthogonales est orthogonal.

Preuve.

Si $A \in O_n(\mathbb{R})$ alors ${}^T A = A^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$. Si on a également $B \in O_n(\mathbb{R})$ alors $AB^T(AB) = AB^T B^T A = AI_n^T A = I_n$ de donc AB est orthogonale. ■

III.1.8 Interprétation géométrique

Si $M \in O_n(\mathbb{R})$ alors M est la matrice d'une BON dans la base canonique qui est orthonormale. Ainsi M^{-1} est la matrice de la base canonique dans une BON et c'est une matrice orthogonale.

III.1.9 Théorème

Soit $M \in O_n(\mathbb{R})$. Alors $\det(M) = \pm 1$

Preuve.

On a $\det(M) = \det(M^T)$ et $M^T = M^{-1}$. Ainsi $\det(M) = \frac{1}{\det(M)}$ et finalement $\det(M) = \pm 1$ ■

III.1.10 Définition

$SO_n(\mathbb{R})$ (aussi noté $SO(n)$) est l'ensemble $\{M \in O(n) \mid \det(M) = 1\}$.

On l'appelle groupe *spécial orthogonal*.

III.1.11 Exercice

Montrer que $SO(n)$ est stable par produit et passage à l'inverse.

III.1.12 Définition

- Soit \mathcal{B} une base de \mathbb{R}^n . On dit que cette base est directe ssi son déterminant dans la base canonique est strictement positif (c'est à dire vaut 1 dans le cas d'une base orthonormée). On dit qu'elle est indirecte sinon.

III.1.13 Proposition

Effectuer un changement de base entre deux bases orthonormées directes ne modifie pas les déterminants (des familles ni des applications linéaires).

On retrouve ici la notion de produit mixte vu en géométrie de 1ère année. On peut calculer le déterminant d'une famille dans n'importe quelle base orthonormée directe et obtenir toujours la même valeur.

Preuve.

SI M est la matrice d'une famille dans une première BOND, la matrice dans la nouvelle BOND est $M' = PM$. Comme $\det(P) = 1$, $\det(M') = \det(M)$. ■

III.2 Matrices symétriques réelles

Rappel : Pour $X, Y \in \mathbb{R}^n$, le produit scalaire canonique peut se calculer par $(X|Y) = X^T Y$.

III.2.1 Définition

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique ssi $A^T = A$. L'ensemble des matrices symétriques de taille n est noté $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. C'est un espace vectoriel de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.

III.2.2 Exercice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est symétrique ssi $P^T A P$ est symétrique.

III.2.3 Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ ssi pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^n$, $(AX|Y) = (X|AY)$ (pour le produit scalaire canonique).

Preuve.

1. Si A est symétrique, alors $(AX|Y) = {}^T(AX)Y = X^T A^T Y = X^T A Y = (X|AY)$ pour tout $(X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2$.

2. Réciproquement, supposons que pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^n$, $(AX|Y) = (X|AY)$ ie $X^T A^T Y = X^T AY$ Montrons que $A^T = A$.

On a, pour tout X, Y , ${}^T X ({}^T A - A) Y = 0$ ou encore $(X|({}^T A - A)Y) = 0$. Ainsi, pour Y fixé, $({}^T A - A)Y$ est orthogonal à tout vecteur de \mathbb{R}^n donc est nul. On a donc $\forall Y \in \mathbb{R}^n$ $({}^T A - A)Y = 0$ et donc $({}^T A - A)$ est d'image nulle. C'est la matrice nulle.

On a prouvé de manière plus générale que $(X|AY) = (A^T X|Y)$ et $(AX|Y) = (X|A^T Y)$. ■

III.2.4 Théorème

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

1. Les valeurs propres de A sont réelles.
2. Si X_1, X_2 sont des vecteurs propres associés à deux valeurs propres distinctes, alors $X_1 \perp X_2$. Autrement dit, les sous espaces propres de A sont orthogonaux deux à deux.

Preuve.

1. Hors programme. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A (c'est possible dès que

$n \geq 1$ d'après le théorème de d'Alembert-Gauss). Soit $X = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ un vecteur

propre associé. Alors $AX = \lambda X$.

Alors $A\bar{X} = \bar{\lambda}\bar{X}$ car A est à coefficients réels (reprendre la formule de produit matriciel, et conjuguer chaque terme). On a alors $(AX)^T \bar{X} = \lambda X^T \bar{X} = \lambda \sum_{i=1}^n |z_i|^2$. De plus, $(AX)^T \bar{X} = X^T A\bar{X} = \bar{\lambda} X^T \bar{X} = \bar{\lambda} \sum_{i=1}^n |z_i|^2$.

Comme $\sum_{i=1}^n |z_i|^2 > 0$ on a bien $\bar{\lambda} = \lambda$.

2. Calculons $(AX_1|X_2)$ de deux manières. On a d'une part $(AX_1|X_2) = \lambda_1(X_1|X_2)$ et d'autre part $(AX_1|X_2) = (X_1|AX_2) = \lambda_2(X_1|X_2)$. Ainsi $(\lambda_1 - \lambda_2)(X_1|X_2) = 0$ et comme $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $(X_1|X_2) = 0$. ■

III.3 Théorème spectral

III.3.1 Théorème

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle.

- Les sous-espace propres de A sont orthogonaux.
- A est diagonalisable (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) dans une base orthonormée, c'est à dire qu'il existe une matrice diagonale D et une matrice **orthogonale** $P \in O_n(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1} = PDP^T$.

Preuve.

Hors programme.

Le polynôme χ_A est scindé sur \mathbb{R} car les valeurs propres de A sont réelles. Notons T une matrice triangulaire supérieure semblable à A via la matrice de passage P : $T = P^{-1}AP$. Toutes les matrices sont à coefficients réels.

On applique le procédé de Gram-Schmidt à la base \mathcal{B} des colonnes de P pour obtenir une famille orthonormale \mathcal{B}' de matrice O dans la base canonique. Alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{B}) = P = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{B}') = \Delta O$ où Δ est triangulaire supérieure et O orthogonale.

On obtient $T = \Delta^{-1}O^{-1}AO\Delta$ ie $\Delta T \Delta^{-1} = {}^T O A O$ est à la fois une matrice symétrique et triangulaire supérieure. Elle est donc diagonale et A est semblable à une matrice diagonale!

III.3.2 Remarque

Si A est symétrique et f est son endomorphisme canoniquement associé, il existe une BON dans laquelle la matrice de f est diagonale.

III.3.3 Exemple

Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ est diagonalisable et la diagonaliser (dans une BON).

A est symétrique réelle donc est diagonalisable

- Remarquons que $\text{rg}(A) = 1$ et donc, d'après le théorème du rang, $\dim(\ker(A)) = 1$ et donc 0 est racine simple de χ_A .
- De plus, la somme (avec multiplicité) des racines de χ_A vaut $\text{tr}(A) = 5$ et donc l'autre valeur propre est 5. On peut observer que χ_A est scindé sur \mathbb{R} et à racines simples, et on retrouve le fait que A est bien diagonalisable
- Après calcul, $E_0(A) = \ker(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

— Les espaces propres de A sont orthogonaux car A est symétrique réelle. Donc $E_5(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

on en déduit qu'une base orthonormée de vecteur propre de A est $(\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix})$ et en posant $P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ on a $A = PDP^{-1} = PDP^T$ car P est une matrice orthogonale.

III.4 Trouver une base orthonormée

III.4.1 Produit vectoriel

Diagonaliser dans une BON la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

la méthode du malin : $\text{rg}(A - I_3) = 2$ donc 1 est valeur propre double

A est symétrique réelle donc diagonalisable. Pour $x \in \mathbb{R}$, $\chi_A(x) = (x - 1)^2(x - 4)$ (après calcul).

— L'espace propre associé à 1 est le plan $\mathcal{P} : x + y + z = 0$ dont une base est $(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = (u_1, u_2)$.

— Comme les espaces propres de A sont orthogonaux, $E_4(A) = \text{Vect} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_v$ (un vecteur normal au plan \mathcal{P}).

Nous avons un problème. On a bien $u_1 \perp v$ et $u_2 \perp v$ mais u_1, u_2 ne sont pas orthogonaux.

Posons $u_3 = u_1 \wedge v$; Alors $u_3 \perp v$ et donc $u_3 \in \mathcal{P}$ et sera à la fois orthogonal à u_1 et v .

Ainsi $(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$ est une base orthogonale de vecteurs propres de A , qu'il

suffit de normer pour trouver une base orthonormale.

III.4.2 Théorème (Orthogonalisation de Gram-Schmidt)

Soit F un sous-espace de \mathbb{R}^n et (e_1, \dots, e_p) une base de F . Alors il existe une base (u_1, \dots, u_p) de F vérifiant

- (u_1, \dots, u_p) est orthogonale
- $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \text{ Vect}(u_1, \dots, u_k) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$.

On peut imposer $\|u_i\| = 1$, c'est à dire que la famille (u_1, \dots, u_p) soit orthonormale (il suffit de diviser u_i par $\|u_i\| \neq 0$). Si on impose de plus que $(e_k|u_k) > 0$ pour tout k , alors la famille obtenue est unique.

Preuve.

Dessin

On note $F_k = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et on pose P_k : "il existe une famille orthogonale (u_1, \dots, u_k) telle que $\text{Vect}(u_1, \dots, u_k) = F_k$ "

— P_1 est clairement vraie, il suffit de poser $u_1 = e_1$. (ou $\frac{e_1}{\|e_1\|}$).

Il existe clairement un seul vecteur de $\text{Vect}(e_1)$ de norme 1 et tel que $(u_1|e_1) > 0$, et c'est $\frac{e_1}{\|e_1\|}$ (et on a $(e_1|u_1) = \|e_1\| > 0$).

— Soit $k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$, on suppose que P_k est vraie.

On remarque d'abord que $e_{k+1} \notin F_k$, d'après la liberté de la famille $(e_i)_i$. On cherche u_{k+1} sous la forme $e_{k+1} - x$, avec $x \in F_k = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_k)$. On écrit donc $x = \sum_{i=1}^k \alpha_{ik} u_i$. On veut maintenant

$$\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket (e_{k+1} - x|u_i) = 0 \text{ ie } \forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket (e_{k+1}|u_i) - \alpha_{ik} \|u_i\|^2 = 0$$

On pose donc $u_{k+1} = e_{k+1} - \sum_{i=1}^k \frac{(e_{k+1}|u_i)}{\|u_i\|^2} u_i \neq 0$ car $e_{k+1} \notin F_k$. C'est un vecteur de F_{k+1} mais pas de F_k , donc $\text{Vect}(u_1, \dots, u_{k+1}) = F_{k+1}$.

Tout vecteur de $\text{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1})$ qui n'est pas dans $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ s'écrit $\lambda e_{k+1} - x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $x \in F_k$. Ainsi d'après le calcul précédent tout vecteur orthogonal à tous les u_i pour $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ est de la forme λu_{k+1} . Il existe un seul vecteur de norme 1 et tel que $(u|e_{k+1}) > 0$ dans $\mathbb{R}f_{k+1}$, c'est le vecteur $\pm \frac{u_{k+1}}{\|u_{k+1}\|}$ (le signe étant choisi pour garder le produit scalaire positif).

— Par récurrence, une base orthogonale de F existe. ■

III.4.3 Exemple $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $A = UU^T$. Diagonaliser A .

On trouve que 0 est valeur propre associée à un espace de dimension 3, $E_0(A) =$

$$\ker(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Comme $\text{tr}(A) = 7$ est également la somme des racines du polynôme caractéristique, 7 est racine. Nous savons que $E_7(A)$ est l'orthogonal de $E_0(A) : x - y - z - 2t = 0$ et donc $E_7(A) = \text{Vect}(U)$.

Trouvons une base orthogonale de A . On note u_1, u_2, u_3 les 3 vecteurs trouvés et on cherche une base v_1, v_2, v_3 orthogonale de $F = E_0(A)$.

On pose déjà $v_1 = u_1$. On cherche maintenant $v_2 \in E_0(A)$ orthogonal à v_1 . On le cherche sous la forme $v_2 = u_2 - \alpha v_1$. Alors $v_2 \perp v_1 \iff \langle v_2, v_1 \rangle = 0 \iff \langle u_2, v_1 \rangle - \alpha \langle v_1, v_1 \rangle = 0 \iff 1 - 2\alpha = 0 \iff \alpha = \frac{1}{2}$.

$$\text{Ainsi } v_2 = u_2 - \frac{v_1}{2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ convient.}$$

On cherche maintenant v_3 orthogonal à la fois à v_1 et v_2 sous la forme $v_3 = u_3 - av_1 - bv_2$. Le même raisonnement donne $\langle u_3, v_1 \rangle - a \langle v_1, v_1 \rangle = 0$ ou encore $2 - 2a = 0$ ie. $a = 1$. De même $v_3 \perp v_2 \iff \langle u_3, v_2 \rangle - b \langle v_2, v_2 \rangle = 0 \iff 1 - \frac{3}{2}b = 0 \iff b = \frac{2}{3}$. Finalement

$$v_3 = u_3 - v_1 - \frac{2}{3}v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{3}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

IV Coniques

Changement de repère, rappel

On se place dans \mathbb{R}^2 (par exemple) et on considère une base $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v})$ Ainsi que $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{B})$ la matrice de passage de la base canonique à \mathcal{B} (dont les colonnes sont \vec{u} et \vec{v} si ces vecteurs étaient notés sous forme de colonne).

Notons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ les coordonnées de X dans le repère (O, \vec{u}, \vec{v}) .

Alors $X = PX'$ et $X' = P^{-1}X$

IV.1 Équation de conique

IV.1.1 Définition

Une courbe \mathcal{C} de \mathbb{R}^2 est dite de type conique si \mathcal{C} est l'ensemble des points $M : (x, y)$ vérifiant une équation de la forme

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ et $d, e, f \in \mathbb{R}$.

IV.1.2 Exemple

Les cercles sont des cas particuliers de coniques.

IV.1.3 Définition

Soient $a, b, p > 0$. On rappelle que les équations réduites des coniques sont de la forme :

- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (ellipse)
- $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (hyperbole)
- $y^2 = 2px$ (parabole)

L'axe focal est, dans chaque cas :

- (Ox) si $a > b$ et (Oy) si $a < b$. Le cas $a = b$ est en fait le cas du cercle qui n'est pas une conique (un cercle n'a pas d'excentricité)
- (Ox)
- (Ox)

IV.1.4 Tracé

Rappelons les tracés obtenus dans le chapitre sur les coniques.

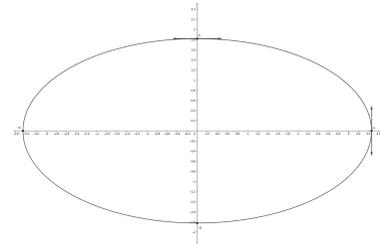


FIGURE 1 – Ellipse dans le repère central, cas $a > b$

IV.2 Réduction d'une conique

IV.2.1 Ecriture matricielle

Fixons les coefficients d'une équation de type conique.

On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$. Alors $X^T A X = ax^2 + bxy + cy^2$. Ainsi en posant en plus $L = \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix}$, on obtient :

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \iff X^T A X + L X + f = 0$$

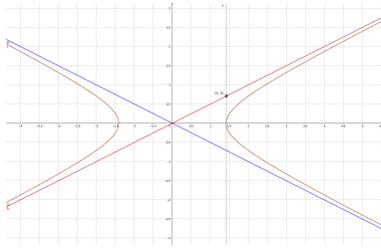


FIGURE 2 – hyperbole dans le repère central

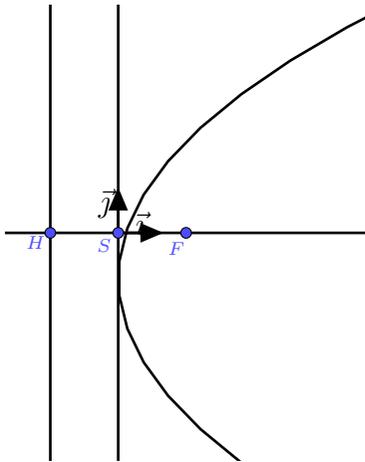


FIGURE 3 – Parabole, dans le repère au sommet

Le but est maintenant de diagonaliser A , ce qui fait disparaître le terme “rectangle” en xy .

D’après le théorème spectral, on peut toujours trouver une base orthonormée directe dans laquelle l’équation n’a plus de terme en xy .

IV.2.2 Après rotation

Comme A est symétrique réelle, on peut la diagonaliser dans une base orthonormée directe. Notons λ, μ ses valeurs propres. On suppose $\lambda \neq \mu$ (sinon, A était déjà diagonale, les homothétie ne changent pas de matrice par changement de base). Notons P la matrice de passage (qui diagonalise A).

Posons $X' = P^{-1}X = P^T X$ ie $X = PX'$, les coordonnées de X dans la nouvelle base.

$$X^T A X + L X + f = 0 \iff (P X')^T A P X' + L P X' + f = 0 \iff {}^T X' D X' + (L P) X' + f = 0 \iff \lambda x'^2 + \mu y'^2 + d' x' + e' y' + f = 0 \text{ où } L P = \begin{pmatrix} d' & e' \end{pmatrix}.$$

1. Si $\lambda = 0$ et $\mu \neq 0$, on obtient (mise sous forme canonique) soit une parabole soit une réunion de droites.
2. Si $\lambda \neq 0$ et $\mu \neq 0$, on passe sous forme canonique (pour x et y , attention à bien factoriser par λ et μ) pour obtenir soit une équation d’ellipse soit une équation d’hyperbole (au moins pour le membre de gauche), après changement de repère par translation (la mise sous forme canonique donne les coordonnées du centre, comme pour les cercles).

Suivant la valeur de la constante, on peut obtenir un seul point, l’ensemble vide ou deux droites sécantes.

IV.2.3 Exemple

Tracer les coniques $3x^2 + 4xy + 3y^2 = \pm 1$.

On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Alors pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ on a $X^T A X = 3x^2 + 4xy + 3y^2$.

De plus, A est symétrique réelle donc est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et ses espaces propres sont orthogonaux. Or pour $x \in \mathbb{R}$

$$\chi_A(x) = x^2 - \text{tr}(A)x + \det(A) = x^2 - 6x + 5$$

Ainsi les valeurs propres de A sont 1 et 5.

Après calcul, $E_1(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et comme les espaces propres de A sont orthogonaux,

$E_5(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Considérons la base orthonormée directe de vecteur propres de A ,

$\mathcal{B} = (u, v) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. On pose $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in SO_2(\mathbb{R})$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

tel que $X = P X'$, c’est à dire que X' est la colonne des coordonnées de X dans la base \mathcal{B} .

En notant $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

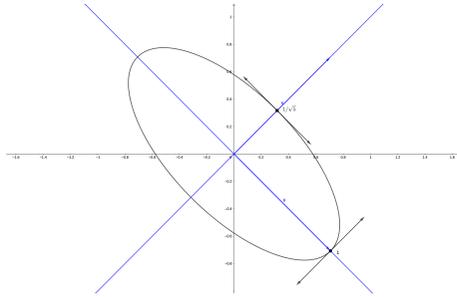
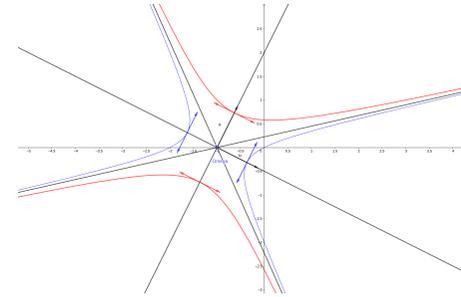
On a alors $X^T A X = X^T P D P^T X = (X')^T D X' = (x')^2 + 5(y')^2$.

Dans le repère $\mathcal{R}' = (O, u, v)$, l’équation étudiée devient $(x')^2 + 5(y')^2 = \pm 1$. Il y a deux cas

— L’équation $(x')^2 + 5(y')^2 = -1$ n’a pas de solution réelle, donc l’ensemble étudié est vide.

— L’ensemble des solutions de $(x')^2 + 5(y')^2 = 1$ est une ellipse que nous allons tracer.

On commence par tracer le nouveau repère, dont on a donné des vecteurs directeurs des axes, puis on trace l’ellipse dans ce nouveau repère. Avec les notations des équations réduites de ce cours, on a $a = 1$ et $b = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

FIGURE 4 – Ellipse d'équation $3x^2 + 4xy + 3y^2 = 1$ FIGURE 5 – Cas $\alpha = 0$ en bleu, $\alpha = -3$ en rouge**IV.2.4 Exemple**

Tracer $x^2 - 4xy - 2y^2 + 2x - 4y = \alpha$ suivant les valeurs de α .

Posons la matrice est $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$. $\det(A) < 0$, on obtient une conique de type hyperbole (deux racines de signe stricts opposés). Les valeurs propres sont les racines de $X^2 + X - 6$ qui sont 2 et -3 .

$E_2 = \text{Vect} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $E_{-3} = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. On pose $P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\vec{u}, \vec{v})$. L'équation dans le nouveau repère devient

$$2x'^2 - 3y'^2 + 2\left(\frac{2x' + y'}{\sqrt{5}}\right) - 4\frac{-x' + 2y'}{\sqrt{5}} = \alpha$$

c'est à dire

$$\begin{aligned} 2x'^2 - 3y'^2 + \frac{8}{\sqrt{5}}x' - \frac{6}{\sqrt{5}}y' = \alpha &\iff 2\left(x' + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{8}{5} - 3\left(y' + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + \frac{3}{5} = \alpha \\ &\iff 2\left(x' + \frac{3}{2\sqrt{5}}\right)^2 - 3\left(y' + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = \alpha + 1 \end{aligned}$$

On pose Ω de coordonnées $\begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ dans le nouveau repère (ce qui donne $P \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans le repère canonique) et (u, v) les deux colonnes de la matrices P dans l'ordre. Alors dans le repère $\mathcal{R}'' = (\Omega, u, v)$ (on note x'', y'' les coordonnées) l'équation devient

$$2(x'')^2 - 3(y'')^2 = \alpha + 1$$

— Cas $\alpha = -1$: l'équation devient $y'' = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}x''$. La conique est en fait une réunion de deux droites.

- Cas $\alpha > -1$: l'équation devient $\left(\sqrt{\frac{2}{\alpha+1}}\right)^2 (x'')^2 - \left(\sqrt{\frac{3}{\alpha+1}}\right)^2 (y'')^2 = 1$ et on obtient une équation réduite d'hyperbole dont les asymptotes sont d'équations $y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ obtenu comme valeur de $\frac{b}{a}$, les $\sqrt{\alpha+1}$ se simplifient
- Cas $\alpha < -1$: cette fois l'équation devient $\left(\sqrt{\frac{3}{-\alpha-1}}\right)^2 (y'')^2 - \left(\sqrt{\frac{2}{-\alpha-1}}\right)^2 (x'')^2 = 1$. L'équation n'est pas réduite, mais il suffit d'échanger le rôle des axes pour tracer. On obtient une hyperbole ou la réunion de deux droites suivant la valeur de α .

IV.2.5 Méthode

Pour réduire une équation de conique :

1. Diagonaliser A , puis écrire l'équation dans le nouveau repère.
2. Passer sous forme canonique en x et y (ou seulement l'un des deux).
3. Exhiber l'éventuel centre, faire le tracé dans le nouveau repère.

Index

Bilinéaire, 1

Définie, 1

Inégalité de cauchy-schwarz, 2

Matrice
orthogonale, 5

Minkowski (inégalité), 2

Orthogonal (d'un sous-espace), 4

Orthogonalisation de gram-schmidt, 8

Orthogonaux (vecteurs), 2

Positive, 1

Produit scalaire, 1

Pythagore, 3

Symétrique, 1