Intégrales généralisées

- Intégrales sur $[a, +\infty[$: convergence (en $+\infty$), intégrales de Riemann, d'exponentielles.
- Intégrales sur un intervalle quelconque : définition de la convergence, propriétés des intégrales convergentes (Chasles, linéarité, positivité, croissance).
- Intégrales de référence : Riemann en 0, ln en 0.
- Convergence par prolongement par continuité.
- Changement de variable : les changements bijectifs et $\mathcal{C}^1$ (hypothèses à ne pas vérifier pour les changements de variables usuels, d'après le nouveau programme) conservent la nature.
- Rappel sur l'intégration par parties, application à la convergence (en pratique on ne vérifie pas explicitement la classe $\mathcal{C}^1$).
- Convergence absolue, intégrabilité.
- Comparaison des fonctions positives, application à la preuve d'intégrabilité.
- Théorème d'intégration terme à terme : si $S = \sum f_n$ est une fonction continue sur I, que les f_n sont continues et intégrables sur I et que $\sum \int_I |f_n|$ converge, alors S est intégrable sur I et on peut échanger les symboles $\int$ et $\sum$ pour calculer l'intégrale de S.

Théorème spectral

- Famille orthonormée dans $\mathbb{R}^n$ pour les produit scalaire canonique.

Questions de cours

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} \mathrm{d}t$ converge ssi $\alpha > 1$.
2. Donner une condition sur $\beta \in \mathbb{R}$ pour que $\Gamma(\beta) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\beta-1} e^{-t} \mathrm{d}t$ converge.
3. Montrer que pour $x > 0$, $\Gamma(x+1)x\Gamma(x)$ et retrouver les valeurs de $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.