Produit scalaire et espaces orthogonaux

Exercice 1
Soit $x_1, x_2, ..., x_n$, $n \in \mathbb{N}^*$, des réels strictement positifs de somme 1. Montrer qu'alors $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \geqslant n^2$.

Exercice 2
Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique, on considère
$v = (0, 3, 1, -1)$ et $w = (1, 2, -1, 1)$. Soit $F = \text{Vect}(v, w)$

Déterminer une base orthonormale de $F^\perp$ puis une base orthonormale adaptée à $F \oplus F^\perp = \mathbb{R}^4$.

Exercice 3
Soit $\mathcal{P} : 2x - y + z = 0$ un plan de l'espace et $\vec{u} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$. Donner les coordonnées du projeté orthogonal de $\vec{u}$ sur $\mathcal{P}$ ainsi que celles de son symétrique orthogonal par rapport à $\mathcal{P}$.

Exercice 4
Dans $\mathbb{R}^3$ munit du produit scalaire canonique, on considère le plan $\mathcal{P} : 2x - y + z = 0$.

1. Construire $\mathcal{B} = (u, v, w)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ telle que (u, v) soit une base orthonormée de $\mathcal{P}$.
2. On considère p et s, le projecteur orthogonal sur $\mathcal{P}$ et la réflexion de plan $\mathcal{P}$ respectivement. Donner la matrice dans $\mathcal{B}$ de p et s.
3. En déduire une expression sous forme de produit matriciel des matrices canoniquement associées à s et p.

Exercice 5
Soit $\overrightarrow{p}$ un vecteur unitaire de $E = \mathbb{R}^3$. Soit

$$f : E \to E,\ \overrightarrow{u} \mapsto \overrightarrow{p} \wedge (\overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{u}).$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer le noyau et l'image de f.
3. Déterminer les éléments propres de f et interpréter géométriquement f.

Matrices orthogonales

Exercice 6
Soient U un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^n$ et $A = I_n - 2U{}^tU$.

Montrer que A est orthogonale et déterminer la nature de l'endomorphisme canoniquement associé.

Exercice 7
Soit $M = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice orthogonale. Montrer que $\left| \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} \right| \leq n$.

(on pourra écrire a_{ij} comme produit scalaire)

Exercice 8
Soit $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique matrice orthogonale O et une unique matrice triangulaire supérieure T dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs tels que : $M = OT$

Matrices symétriques

Exercice 9
Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la matrice $B = A\,{}^tA - {}^tA\,A$ ait toutes ses valeurs propres positives. Montrer que $B = 0$.

Exercice 10
Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $B = A^3$. Montrer qu'il existe un polynôme P tel que $A = P(B)$.

Exercice 11
Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $A^T A$ est diagonalisable.
   On suppose pour le reste de l'exercice que A est inversible telle que
   $$^tA = A^{-1} + I_n.$$
2. En déduire que A est diagonalisable.
3. Déterminer un polynôme annulateur de A, c'est-à-dire un polynôme P tel que $P(A) = 0$.
4. On suppose que A n'est pas une homothétie. Déterminer le spectre de A.

Coniques

Exercice 12
Tracer dans le repère canonique les coniques :

$$x^2 + 8xy - 5y^2 \pm 21 = 0$$
$$9x^3 + 4xy + 6y^2 + \alpha = 0$$
$$9x^2 - 24xy + 16y^2 + 10x - 55y + 50 = 0$$

avec $\alpha = -20, 0, 20$.