Table des matières

Dans tout ce cours, I désigne un intervalle non vide et non réduit à un point.

I Etude métrique

I.1 Longueur d'une courbe

I.1.1 Notion intuitive de longueur

La longueur de la courbe entre les points de paramètres t et $t+\mathrm{d}t$ est $\approx \|f'(t)\|\mathrm{d}t =$ vitesse $\times$ temps. Si on intègre entre a et b, on trouve donc la longueur de la courbe entre les points de paramètres a et b.

I.1.2 Définition

Soient $a, b \in I$. On appelle longueur (algébrique) de $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^2)$ entre les points de paramètres a et b le réel $\int_a^b \|f'(t)\|\mathrm{d}t$.

I.1.3 Exemple

1. Calculer la longueur du cercle trigonométrique.
2. Calculer la longueur de l'arc de la parabole $y = x^2$ entre les abscisses 0 et 2.

   On considère la courbe paramétrée $t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$ dont le support est cette parabole. En effet, $M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vérifie $y = x^2$ ssi il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $x = t$ et $y = x^2 = t^2$. f est une courbe $\mathcal{C}^1$ et on a $f' : t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}$

   La longueur l cherchée vaut donc $l = \displaystyle\int_0^2 \sqrt{1+4t^2}\mathrm{d}t$. On sait que $x \mapsto \mathrm{sh}(x)$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On veut poser une nouvelle variable u telle que $2t = \mathrm{sh}(u)$ (qui est un changement de variable $\mathcal{C}^1$ et bijectif) ie $t = \frac{1}{2}\mathrm{sh}(u)$. On pose α tel que $\frac{1}{2}\mathrm{sh}(\alpha) = 2$ ie $\mathrm{sh}\,\alpha = 4$. On a de plus $\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\mathrm{ch}(u)\mathrm{d}u$

Alors $l = \displaystyle\int_0^\alpha \sqrt{1+\mathrm{sh}^2(u)}\frac{1}{2}\mathrm{ch}(u)\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_0^\alpha \mathrm{ch}^2(u)\mathrm{d}u$ car ch est positive et $\mathrm{ch}^2 = 1+\mathrm{sh}^2$.

Ainsi
$$l = \frac{1}{2}\int_0^\alpha \frac{e^{2u}+2+e^{-2u}}{4}\mathrm{d}u = \frac{1}{8}\left[\frac{e^{2u}}{2}+2u-\frac{e^{-2u}}{2}\right]_0^\alpha = \frac{e^{2\alpha}+4\alpha-e^{2\alpha}}{16}$$

Or on a $e^\alpha - e^{-\alpha} = 8$ car $\mathrm{sh}(\alpha) = 4$. Ainsi $(e^\alpha)^2 - 8e^\alpha - 1 = 0$. En considérant que l'inconnue est e^α, on trouve que le discriminant est $68 = 4 \times 17$. Ainsi $e^\alpha = \frac{8+2\sqrt{17}}{2} = 4+\sqrt{17}$ (l'autre racine du trinôme est strictement négative). On en déduit que $\alpha = \ln(4+\sqrt{17})$ et $e^{2\alpha} = 8e^\alpha + 1 = 33+8\sqrt{17}$. De plus, $e^{-\alpha} = e^\alpha - 8 = \sqrt{17}-4$ et donc $e^{-2\alpha} = 1 - 8e^{-\alpha} = 33-8\sqrt{17}$.

Finalement $l = \frac{33+8\sqrt{17}+4\ln(4+\sqrt{17})-(33-8\sqrt{17})}{16} = \sqrt{17} + \frac{1}{4}\ln(4+\sqrt{17})$.

On peut aisément vérifier en python

```python
import scipy.integrate as sci
import numpy as np
def f(t):
    return np.sqrt(1 + 4*t**2)

sci.quad(f, 0, 2)  # valeur approchée de l'intégrale de f entre 0 et 2
np.sqrt(17) + np.log(4 + np.sqrt(17))/4
```

I.1.4 Exemple

Calculons la longueur de la cycloïde sur $[-\pi, \pi]$. Il s'agit de la courbe paramétrée par $f : t \mapsto \begin{pmatrix} t-\sin(t) \\ 1-\cos(t) \end{pmatrix}$.

On trouve $\|f'(t)\| = 2|\sin\frac{t}{2}|$ en utilisant $1-\cos t = 2\sin^2\frac{t}{2}$ et $\sin(t) = 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}$.

Alors la longueur cherchée est $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} 2|\sin\frac{t}{2}|\mathrm{d}t = 4\int_0^\pi \sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t$ car $t \mapsto |sin\frac{t}{2}|$ est paire et $\forall t \in [0,\pi]\ \sin\frac{t}{2} \geqslant 0$.

On obtient donc $4\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^\pi = 8$, qui est la longueur d'une arche de cette cycloïde.

I.2 Abscisse curviligne

On considère maintenant $f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^2)$ une courbe **régulière** (la vitesse ne s'annule pas), avec $k \geqslant 1$.

I.2.1 Définition

Soit $t_0 \in I$.

On appelle abscisse curviligne de f d'origine t_0 la fonction $s : \left\{ \begin{array}{lcl} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \int_{t_0}^{t} \|f'(u)\|\mathrm{d}u \end{array} \right.$.

A retenir : $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \|f'\|$ et lorsque cela a du sens, $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\|f'\|}$.

I.2.2 Remarque

L'information connue *a priori* sur s est la dérivée : $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \|f'\|$. Elle ne dépend pas de l'origine choisie. Dans la suite on supposera choisie une origine.

I.2.3 Exemple

On considère la courbe paramétrée $f : t \mapsto \overrightarrow{OM}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \mathrm{ch}(t) \end{pmatrix}$ qui a pour support la courbe représentative de ch.

Calculons l'abscisse curviligne d'origine 0.

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{1 + \mathrm{sh}^2(u)}\mathrm{d}u = \int_0^t \mathrm{ch}(u)\mathrm{d}u = \mathrm{sh}(t)$$

I.2.4 Proposition

On considère une courbe régulière f de classe $\mathcal{C}^k$.

L'abscisse curviligne d'origine t_0 est une bijection $\mathcal{C}^k$ dont la réciproque est $\mathcal{C}^k$.

Interprétation : on peut, dans le cas d'une courbe régulière, repérer un point de la trajectoire non plus par l'instant où on y passe mais par la distance (algébrique) à l'origine fixée. En effet tout point est à une distance donnée (surjectivité) et à une distance donnée correspond un seul point (injectivité).

De plus, on ne change pas la classe $\mathcal{C}^k$ de la courbe paramétrée si on choisi d'utiliser l'abscisse curviligne d'origine t_0 pour paramétrer (repérer les points).

Preuve.

Rappelons que l'application $N : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$.

Ainsi $g : t \mapsto \|f'(t)\|$ est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur I car f' ne s'annule pas. On a même $\forall t \in I \ g(t) > 0$.

De plus, $s : t \mapsto \displaystyle\int_{t_0}^{t} g(u)\mathrm{d}u$ est la primitive de g qui s'annule en t_0 et est donc de classe $\mathcal{C}^k$ sur I. Comme $s' = g > 0$, s est strictement croissante et $s : I \to s(I)$ est bien une bijection.

Comme s' ne s'annule pas, s^{-1} est également de classe $\mathcal{C}^k$. Pour mémoire, on a $\forall x \in s(I) \ (s^{-1})'(x) = \frac{1}{s'(s^{-1}(x))}$. ■

I.2.5 Paramétrage par l'abscisse curviligne

Notons $J = s(I)$. Le résultat précédent permet de définir une nouvelle courbe de même support $g : \left\{ \begin{array}{lcl} J & \to & \mathbb{R}^2 \\ u & \mapsto & f(s^{-1}(u)) \end{array} \right.$. On a en fait changé la manière de parcourir la même trajectoire, et on obtient immédiatement $\left\| \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}u} \right\| = 1$ (paramétrage normal). Remarquons que $u = s(t) \Rightarrow g(u) = f(t)$.

I.2.6 Notation

La relation relation $\left\| \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}u} \right\| = 1$ est classiquement notée $\left\| \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s} \right\| = 1$, pour indiquer que le paramétrage choisi est celui par l'abscisse curviligne. On a maintenant $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = f' \times \frac{1}{\|f'\|}$.

Si on paramètre f par s, on repère en fait les points de la trajectoire non plus par le temps de parcours, mais par la distance depuis l'origine. Il semble cohérent que le vecteur vitesse soit de norme 1.

I.2.7 Proposition

Pour une courbe régulière f, on a $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\|f'\|}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$. C'est un vecteur directeur unitaire de la tangente pour chaque paramètre.

I.2.8 Exemple

Reprenons la courbe de l'exemple I.2.3.

L'abscisse curviligne considérée est $t \mapsto \mathrm{sh}(t)$. Notons $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la bijection réciproque de sh. On a alors $s = \mathrm{sh}(t)$ donc $t = \varphi(s)$ et on peut paramétrer la courbe (en abusant des notations, la fonction considérée n'est plus vraiment f) par

$$f : s \mapsto \overrightarrow{OM}(s) = \begin{pmatrix} \varphi(s) \\ \mathrm{ch}(\varphi(s)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(s) \\ \sqrt{1 + s^2} \end{pmatrix}$$

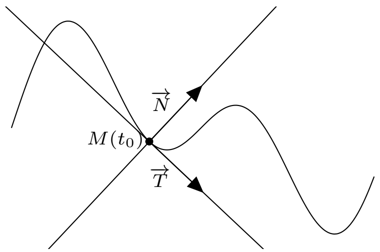
On a alors $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s} = \begin{pmatrix} \varphi'(s) \\ \frac{s}{\sqrt{1+s^2}} \end{pmatrix}$. Or $\varphi'(s) = \frac{1}{\mathrm{sh}'(\varphi(s))} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et on trouve bien que la norme de $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}$ est 1.

I.3 Repère de Frenet

I.3.1 Définition

Soit $t_0 \in I$. On note $\overrightarrow{T}(t_0) = \frac{f'(t_0)}{\|f'(t_0)\|}$ (vecteur unitaire tangent de f en t_0) et $\overrightarrow{N}(t_0)$ (vecteur unitaire normal de f en t_0) le vecteur unitaire directement orthogonal à $\overrightarrow{T}(t_0)$.

Le repère $(M(t_0), \overrightarrow{T}(t_0), \overrightarrow{N}(t_0))$ est appelé repère de Frenet de f en t_0.



La droite affine $M(t_0) + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{N}(t_0))$ (passant par $M(t_0)$ et dirigée par $\overrightarrow{N(t_0)}$) est appelée droite **normale** à la courbe au point $M(t)$.

I.3.2 Exemple

On considère la courbe $f : \begin{cases}]0, 2\pi[& \to & \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto & \mapsto & \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix} \end{cases} = \overrightarrow{OM}(t)$ (une arche de cycloïde).

Alors, pour $t \in]0, \pi[$, on a $f'(t) = \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ et $\|f'(t)\| = |2 \sin \frac{t}{2}| = 2 \sin \frac{t}{2}$.

Ainsi $\vec{T}(t) = \begin{pmatrix} \sin \frac{t}{2} \\ \cos \frac{t}{2} \end{pmatrix}$. Ainsi $\vec{N}(t) = \begin{pmatrix} -\cos \frac{t}{2} \\ \sin \frac{t}{2} \end{pmatrix}$.

Ainsi, à l'instant t, le repère de Frénet est $(M(t), \vec{T}(t), \vec{N}(t))$ où $M(t) = \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix}$.

I.3.3 Proposition

Lorsque f est une courbe régulière et $\mathcal{C}^2$, $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}t}$ est toujours colinéaire à $\overrightarrow{N}$.

De même $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s}$ est toujours colinéaire à $\overrightarrow{N}$.

Preuve.
Notons $\overrightarrow{T} : t \mapsto \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$. Alors $\overrightarrow{N} : t \mapsto \frac{-b(t)}{a(t)}$.

De plus, pour tout $t \in I$, $\sqrt{a(t)^2 + b(t)^2} = 1$. En dérivant chaque membre (c'est possible car a, b sont dérivables et $a^2 + b^2$ ne s'annulent pas) on obtient

$$\frac{a'(t)a(t) + b'(t)b(t)}{\sqrt{a(t)^2 + b(t)^2}} = 0$$

Ainsi $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ est orthogonal à $\overrightarrow{T}$ (le produit scalaire, qui est le numérateur précédent, est nul).

Pour la seconde partie, il suffit de remarquer que $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}t} \times \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}$ et $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\|f'\|}$ est un scalaire. ∎

I.4 Courbure

I.4.1 Définition

Soit f une courbe régulière et de classe $\mathcal{C}^2$ définie sur l'intervalle I.

En tout $t \in I$, on note $\gamma(t)$ le nombre vérifiant

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s} = \gamma \overrightarrow{N}$$

Cette formule est appelée **formule de Frenet**.

Une analyse immédiate des unité montre que γ s'exprime en m^{-1} car s est une longueur.

On admet provisoirement que la fonction γ ainsi définie sur I est de classe $\mathcal{C}^{k-2}$ lorsque f est de classe $\mathcal{C}^k$.

I.4.2 Interprétation du signe de γ

Remarquons d'abord que, en t_0 fixé, pour passer du vecteur $\overrightarrow{T}$ au vecteur $\overrightarrow{N}$ on tourne d'un angle de $\frac{\pi}{2}$ "vers la gauche" (dans le sens trigonométrique, le cercle est un virage à gauche).

De plus, $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s}$ représente les variations de $\overrightarrow{T}$, c'est à dire les variables de la trajectoire.

— Lorsque $\gamma(t_0) > 0$, la courbe tourne "vers la gauche" au voisinage de t_0 (à interpréter comme sur le cercle).

— Lorsque $\gamma(t_0) < 0$, la courbe tourne "vers la droite".

I.4.3 Exemple

1. Courbure du cercle de centre O et de rayon $R > 0$. On trouve $\gamma = \frac{1}{R}$ (une fonction constante).
2. Pour la cycloïde, sur $] - \pi, \pi[$, on avait $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}}$.

   Ainsi $\vec{T} = \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \frac{t}{2} \\ \cos \frac{t}{2} \end{pmatrix}$. Donc $\vec{N} = \begin{pmatrix} -\cos \frac{t}{2} \\ \sin \frac{t}{2} \end{pmatrix}$.

   De plus, $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cos \frac{t}{2} \\ -\frac{1}{2} \sin \frac{t}{2} \end{pmatrix}$ et donc $\gamma(t) = \frac{-1}{4 \sin \frac{t}{2}}$.

I.4.4 Exemple

Calculer l'expression du vecteur vitesse et du vecteur accélération en fonction de $\overrightarrow{T}, \overrightarrow{N}, \gamma$.

On note $v = \|f'\|$ et $\vec{v} = f'$. Alors $\vec{v} = v\vec{T}$ par définition de $\vec{T}$.

De plus, $\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{T} + v\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{T} + v\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{T} + v^2\gamma\vec{N}$.

I.4.5 Théorème (Détermination angulaire)

Il existe une fonction $\alpha \in \mathcal{C}^{k-1}(I, \mathbb{R})$ telle que

$$\forall t \in I \ \overrightarrow{T}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha(t)) \\ \sin(\alpha(t)) \end{pmatrix} = \cos(\alpha(t))\vec{\imath} + \sin(\alpha(t))\vec{\jmath}$$

Ainsi $\alpha(t)$ est l'angle entre $\vec{\imath}$ (le premier vecteur de la base canonique) et $\overrightarrow{T}(t)$.

Preuve.

Hors programme.

On considère la fonction $g : I \to \mathbb{C}$ qui à t associe l'affixe de $\overrightarrow{T}(t)$. On a $\|\overrightarrow{T}(t)\| = 1$ et donc $|g(t)| = 1$. il s'agit de montrer que $\forall t \in I \ g(t) = e^{i\alpha(t)}$ et que la fonction α est $\mathcal{C}^{k-1}$. On sait que g est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$.

On a $g\overline{g} = 1$ et en dérivant on obtient $g'\overline{g} + g\overline{g'} = 0$, c'est à dire que la fonction $g'\overline{g} = \frac{g'}{g}$ (si $|z| = 1$ alors $\overline{z} = \frac{1}{z}$) est imaginaire pure.

On fixe $t_0 \in I$. Soit $\theta : t \mapsto -i\int_{t_0}^{t} \frac{g'(t)}{g(t)}\mathrm{d}t$. Alors $\theta : I \to \mathbb{R}$ et est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$

On a alors

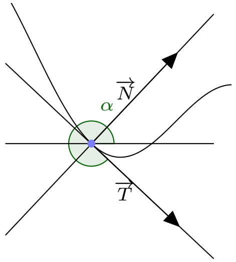
$$\left(\frac{e^{i\theta(t)}}{g(t)}\right)' = \frac{i\theta'(t)e^{i\theta(t)}g(t) - e^{i\theta(t)}g'(t)}{f^2(t)} = \frac{e^{\theta(t)}}{g^2(t)}\left(\frac{g'(t)}{g(t)}g(t) - g(t)\right) = 0$$

Ainsi $t \mapsto \frac{e^{i\theta(t)}}{g(t)}$ est une fonction constante sur l'intervalle I.

$$g(t) = Ke^{i\theta(t)}$$

avec $g(t_0) = K = e^{ia}$ car $|g(t_0)| = 1$ et donc $g(t) = e^{i(a+\theta(t))}$ et $\alpha = a + \theta \in \mathcal{C}^{k-1}$ convient ! ■

I.4.6 Illustration



I.4.7 Proposition

Avec les notations du théorème précédent, $\gamma = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}$

Preuve.

En notant $\overrightarrow{T} = \cos(\alpha)\vec{\imath} + \sin(\alpha)\vec{\jmath}$, on a $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}(-\sin(\alpha)\vec{\imath} + \cos(\alpha)) = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\overrightarrow{N}$.

Ne pas oublier que α dépend du paramètre (s ici) et qu'on doit donc utiliser une dérivée composée. ■

I.4.8 Interprétation de la courbure

1. Si $\gamma > 0$, c'est que la détermination angulaire croit, c'est à dire que la courbe tourne vers la gauche.
2. Si $\gamma < 0$, c'est que la détermination angulaire décroît, c'est à dire que la courbe tourne vers la droite.
3. Si γ est grand en valeur absolue, c'est que α change rapidement, c'est à dire que la courbe tourne "vite".

II Enveloppe, développée

II.1 Courbe développée

II.1.1 Définition

Un point d'une courbe paramétrée est dit birégulier ssi les vecteurs vitesse et accélération en ce point ne sont pas colinéaires. On a donc (avec les notations classiques) les entiers p et q qui valent $p = 1$ et $q = 2$.

II.1.2 Proposition
Pour une courbe régulière $\mathcal{C}^2$, le point de paramètre t est birégulier ssi $\gamma(t) \neq 0$.

Preuve.
Si on calcule $[\overrightarrow{T}, \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s}]$ (produit mixte, c'est le déterminant dans le plan qui ne dépend pas du ROND choisi pour le calculer), on obtient γ en prenant les coordonnées dans la base de Frenet.

Hors, $\overrightarrow{T} = \frac{1}{\|f'\|} f'$ et $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\|f'\|} \times \left(\left(\frac{1}{\|f'\|} \right)' f' + \frac{1}{\|f'\|} f'' \right)$.

Ainsi $\gamma = \left[\frac{1}{\|f'\|} f', \frac{1}{\|f'\|} \times \left(\left(\frac{1}{\|f'\|} \right)' f' + \frac{1}{\|f'\|} f'' \right) \right] = [[\frac{1}{\|f'\|} f', [\frac{1}{\|f'\|^2} f''] = \frac{1}{\|f'\|^3} [f', f'']$ (linéarité + caractère alterné). Finalement

$$\gamma = \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} \right)^3 \left[\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2} \right]$$

∎

II.1.3 Définition
Soit $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R}^2)$ une courbe birégulière (tous les points sont biréguliers). Le rayon de courbure au point t est $R(t) = \frac{1}{\gamma(t)}$ et le centre de courbure est le point $C(t) = M(t) + R(t)\overrightarrow{N}(t)$ ie $\overrightarrow{MC} = R\overrightarrow{N}$.

On peut évidemment repérer M par son abscisse curviligne et exprimer toutes les quantités en fonction de s.

II.1.4 Interprétation

Au point de paramètre $t_1 \in I$, le cercle tangent en $\overrightarrow{T(t_1)}$ qui "ressemble" le plus à la courbe est le cercle centré en $C(t_1)$ et de rayon $R(t_1)$. On l'appelle cercle de courbure en t_1.

II.1.5 Définition
Le lieu des centres de courbure d'une courbe s'appelle la courbe développée. C'est la courbe $t \mapsto \overrightarrow{OC}(t)$.

II.1.6 Exemple
Prenons comme courbe l'ellipse $f : t \mapsto \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \overrightarrow{OM}(t)$ sur $[-\pi, \pi]$. Trouvons sa courbe développée.

f est de classe $\mathcal{C}^2$. Soit $t \in [-\pi, \pi]$. $f'(t) = \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$ et donc
$\vec{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{4\sin^2(t) + \cos^2(t)}} \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$.
Trouvons γ.
On a $\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\|f'(t)\|} \frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}t}$
Ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s}(t) &= \frac{1}{\sqrt{3\sin^2(t)+1}} \left(-\frac{1}{2} \frac{6\cos(t)\sin(t)}{(3\sin^2(t)+1)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{3\sin^2(t)+1}} \begin{pmatrix} -2\cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{(3\sin^2(t)+1)^2} \left(-3\cos(t)\sin(t) \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} + (3\sin^2(t)+1) \begin{pmatrix} -2\cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{(3\sin^2(t)+1)^2} \begin{pmatrix} 6\cos(t)\sin^2(t) - 6\sin^2(t)\cos(t) - 2\cos(t) \\ -3\cos^2(t)\sin(t) - 3\sin^3(t) - \sin(t) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{(3\sin^2(t)+1)^2} \begin{pmatrix} -2\cos(t) \\ -4\sin(t) \end{pmatrix} = \frac{2}{(3\sin^2(t)+1)^{\frac{3}{2}}} \vec{N}
\end{aligned}$$

Ainsi $\gamma(t) = \frac{2}{(3\sin^2(t)+1)^{\frac{3}{2}}}$.

Maintenant, le centre de courbure vérifie $C(t) = M(t) + \frac{1}{\gamma(t)}\vec{N}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + \frac{3\sin^2(t)+1}{2} \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ -2\sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\cos(t) - \frac{3}{2}\cos(t)\sin^2(t) \\ -3\sin^3(t) \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} \cos^3(t) \\ -2\sin^3(t) \end{pmatrix}$ et on reconnaît une astroïde.

II.1.7 Exemple
Calculons la développée de la cycloïde (sur $]-\pi, \pi[$, le reste s'obtenant par translation).

Ici $M(t) = \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix}$. De plus, $R(t) = -4\sin\frac{t}{2}$ et $\vec{N}(t) = \begin{pmatrix} -\cos\frac{t}{2} \\ \sin\frac{t}{2} \end{pmatrix}$.

Ainsi $C(t) = \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2\sin t \\ 2(1-\cos(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t + \sin(t) \\ -1 + \cos(t) \end{pmatrix}$. On obtient une autre cycloïde.

II.2 Enveloppe d'une famille de droite

II.2.1 Définition
Soit $(\mathcal{D}_t)_{t\in I}$ une famille de droite. On dit que $(\mathcal{D}_t)_{t\in I}$ admet la courbe $f : t \mapsto \overrightarrow{OM(t)}$ comme enveloppe ssi pour tout $t \in I$ on a

1. $M(t) \in \mathcal{D}_t$
2. $\mathcal{D}_t$ est tangente à f en $M(t)$.

II.2.2 Mise en équation

On se donne un points $A(t)$ et un vecteur directeur $\vec{u}(t)$ pour chaque droite $\mathcal{D}_t$. Ainsi $\mathcal{D}_t = \{A(t) + \lambda\vec{u}(t) |\ \lambda \in \mathbb{R}\} = A(t) + \text{Vect}(\vec{u}(t))$.

On cherche donc à écrire $M(t) = A(t) + \lambda(t)\vec{u}(t)$ et il faut en plus que la tangente en $M(t)$ soit dirigée par $\vec{u}(t)$.

On suppose les fonctions en jeu dérivables et on obtient $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = A'(t) + \lambda'(t)\vec{u}(t) + \lambda(t)\vec{u}'(t)$. La condition de tangence devient $[\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}, \vec{u}(t)] = 0$ qui peut se récrire $[A'(t) + \lambda(t)\vec{u}'(t), \vec{u}(t)] = 0$ (le déterminant est alterné).

II.2.3 Proposition
Une enveloppe de la famille $\mathcal{D}_t = A(t) + \text{Vect}(\vec{u}(t))$ est donnée par $f : t \mapsto M(t) = A(t) + \lambda(t)\vec{u}(t)$ où λ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $[A'(t) + \lambda(t)\vec{u}'(t), \vec{u}(t)] = 0$.

II.2.4 Exemple
Cherchons l'enveloppe de la famille de droites $\mathcal{D}_t : x - \cos(t)y - \sin(t) = 0$, $t \in [-\pi, \pi]$.

Pour $t \in \mathbb{R}$ on a $D_t = \begin{pmatrix}\sin(t)\\0\end{pmatrix} + \text{Vect}(\begin{pmatrix}\cos(t)\\1\end{pmatrix}) = A(t) + \text{Vect}(\vec{u}(t))$.

On cherche $\lambda(t)$ tel que $M(t) = A(t) + \lambda(t)\vec{u}(t)$ et vérifiant $\det_{\mathcal{B}_c}(M'(t), \vec{u}(t)) = 0$. Alors la fonction λ vérifie $\det(A'(t) + \lambda(t)\vec{u}'(t), \vec{u}(t)) = 0$ ie $\begin{vmatrix}\cos(t) - \lambda(t)\sin(t) & \cos(t)\\ 0 & 1\end{vmatrix}$ ou encore $\cos(t) - \lambda(t)\sin(t) = 0$.

Pour $t \notin \{-\pi, 0, \pi\}$, $\lambda(t) = \frac{\cos(t)}{\sin(t)}$ et on obtient $M(t) = \begin{pmatrix}\sin(t)\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{\cos^2(t)}{\sin(t)}\\ \frac{\sin(t)}{\cos(t)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin(t) + \frac{\cos^2(t)}{\sin(t)}\\ \frac{\cos(t)}{\sin(t)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sin(t)}\\ \frac{\cos(t)}{\sin(t)}\end{pmatrix}$.

On peut tracer au remarquer que tous les points de la courbe vérifient $x^2 - y^2 = 1$. On connaît les symétries de cette courbes qui correspondent à celles de l'enveloppe calculée.

De plus, si on prend $x, y \geqslant 0$ tels que $x^2 - y^2 = 1$ alors $x^2 = 1 + y^2 \geqslant 1$ et donc $|x| \geqslant 1$. Ainsi on peut poser un $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$ tel que $\frac{1}{x} = \sin(t)$ et donc $x = \frac{1}{\sin(t)}$. On a alors $y^2 = x^2 - 1 = \frac{1}{\sin^2(t)} - 1 = \frac{\cos^2(t)}{\sin^2(t)}$. Ainsi $y = \pm\frac{\cos(t)}{\sin(t)}$ et comme $y \geqslant 0$, $y = \frac{\cos(t)}{\sin(t)}$.

Finalement, on peut paramétrer notre quart d'hyperbole pour être la courbe enveloppe calculée et le tracé est maintenant immédiat.

II.2.5 Proposition
Soit $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R}^2)$ une courbe birégulière. La courbe développée de f est également l'enveloppe de la famille $\mathcal{D}_t = M(t) + \text{Vect}(\overrightarrow{N}(t))$ (la famille des normales).

On peut remplacer le vecteur $\vec{N}(t)$ par n'importe quel vecteur proportionnel et non nul.

Preuve.
Notons $g : s \mapsto C(s) = M(s) + R(s)\overrightarrow{N}(s)$ la courbe développée de f que l'on a paramétré par l'abscisse curviligne. Clairement chaque point de g est sur une normale.

Il reste à montrer que les normales sont tangentes à g. Or $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OC}}{\mathrm{d}s} = \overrightarrow{T} + \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}s}\overrightarrow{N} + R \times (-\gamma\overrightarrow{T}) = \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}s}\overrightarrow{N}$. Ainsi les tangentes à g sont dirigées par $\overrightarrow{N}$. ■

II.2.6 Conséquence géométrique

Les normales à f sont tangentes à la courbe développée.

II.2.7 Exemple
Calculons la développée de la demi-hyperbole paramétrée par $x(t) = \text{ch}(t)$ et $y(t) = \text{sh}(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

On note $f : t \mapsto \begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}$ qui est $\mathcal{C}^\infty$. De plus, pour $t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = \begin{pmatrix}\text{sh}(t)\\ \text{ch}(t)\end{pmatrix}$ et donc $\vec{N}(t)$ est proportionnel à $\vec{u}(t) = \begin{pmatrix}-\text{ch}(t)\\ \text{sh}(t)\end{pmatrix}$.

On cherche donc une courbe notée M qui vérifie $M(t) = \begin{pmatrix}\text{ch}(t)\\ \text{sh}(t)\end{pmatrix} + \lambda(t)\begin{pmatrix}-\text{ch}(t)\\ \text{sh}(t)\end{pmatrix}$ pour une fonction λ telle que $[f'(t) + \lambda(t)\vec{u}'(t), \vec{u}(t)] = 0$.

Cette équation peut s'écrire $\begin{vmatrix}\text{sh}(t) - \lambda(t)\,\text{sh}(t) & -\text{ch}(t)\\ \text{ch}(t) + \lambda(t)\,\text{ch}(t) & \text{sh}(t)\end{vmatrix} = 0$ ou encore $\text{sh}^2(t) + \text{ch}^2(t) + \lambda(t)(-\text{sh}^2(t) + \text{ch}^2(t)) = 0$ c'est à dire $\lambda(t) = -\text{ch}^2(t) - \text{sh}^2(t)$.

Finalement, $M(t) = \begin{pmatrix}\text{ch}(t) + \text{ch}^3(t) + \text{sh}^2(t)\,\text{ch}(t)\\ \text{sh}(t) - \text{ch}^2(t)\,\text{sh}(t) - \text{sh}^3(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\,\text{ch}^3(t)\\ -2\,\text{sh}^3(t)\end{pmatrix}$

Index