Devoir surveillé n°4

Durée : 4H. Calculatrices interdites. **Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction et la propreté : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.**

Lisez l'énoncé attentivement et en entier **AVANT** de commencer chaque exercice.

Exercice 1 (Questions de cours)

1. Tracer les coniques d'équations réduites $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ et $x^2 - y^2 = 1$ en précisant dans chaque cas l'axe focal. Un point bonus si vous placez les foyers.
2. Donner, avec justification rapide, la nature des intégrales suivantes :

   (a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2+t+1}{\mathrm{ch}(t)}\mathrm{d}t$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t$

3. On pose $u = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$ et $v = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$.
   (a) Calculer $w = u \wedge v$ et montrer que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base orthonormée directe.
   (b) On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(u, v, w)$ (matrice dans la base canonique). Que dire de A au vu de la question précédente ?
   (c) Montrer que A est une matrice de symétrie et donner ses espaces propres. Quel est l'interprétation géométrique de $f : \left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3\\ X & \mapsto & AX\end{array}\right.$, l'application canoniquement associée à A ?

Exercice 2

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix}1 & -1\\2 & 2\end{pmatrix}$, ainsi que $S = A^T A$. On pose également $B = \begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}$

1. Montrer, sans calculer ses coefficients, que S est diagonalisable (sur $\mathbb{R}$).
2. Calculer $\det(A)$ et en déduire que 0 n'est pas une valeur propre de S.
3. Calculer S, puis exhiber une matrice D diagonale et une matrice $P \in O_2(\mathbb{R})$ telle que $S = PDP^T$.
4. Montrer que B est diagonalisable et exhiber une matrice diagonale Δ ainsi qu'une matrice orthogonale $Q \in O_2(\mathbb{R})$ telle que $B = Q\Delta Q^T$.
5. Exhiber une matrice Δ' telle que $(\Delta')^2 = \Delta$, puis une matrice C telle que $B = C^T C$.
6. Quelle propriété des valeurs propres de B assure que Δ' existe ?
7. Déduire de la question 5 que pour tout $X = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, on a $X^T BX \geqslant 0$. Que dire de $X^T SX$?
8. Qu'en déduire pour la conique $\mathcal{C}_1 : 2x^2 + 2xy + y^2 = -1$?
9. Tracer dans le repère canonique (d'axes (Ox) et (Oy)) la conique d'équation $2x^2 + 2xy + 2y^2 = 1$.

Exercice 3

Partie I

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$W_n = \int_0^1 \frac{u^n}{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}u.$$

1. Montrer que l'intégrale définissant W_0 est convergente et la calculer.
2. Donner une primitive, sur un intervalle à préciser, de la fonction $t \mapsto \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$, montrer que W_1 est défini par une intégrale convergente et que $W_1 = 1$
3. Montrer que l'intégrale définissant W_n est convergente en utilisant une comparaison.
4. Montrer que $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et positive. Qu'en déduire ?
5. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n$$

   On pourra utiliser la question 2.

6. Déduire des questions précédentes que $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} W_{n+1}$
7. Montrer que $((n+1)W_nW_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante.
8. Montrer que
$$W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$
9. Montrer par changement de variable que $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\mathrm{d}t$.

Partie II

L'objectif de cette partie est d'établir la convergence et de calculer la valeur de l'intégral de Gauss $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que pour tout réel x de $]-1,+\infty[$: $\ln(1+x) \leqslant x$.
2. En déduire que, pour tout entier naturel non nul n, et tout réel t de $]0,\sqrt{n}[$:
$$\ln\left(1-\frac{t^2}{n}\right) \leqslant -\frac{t^2}{n} \text{ et } \ln\left(1+\frac{t^2}{n}\right) \leqslant \frac{t^2}{n}$$
3. Montrer que, pour n entier naturel non nul, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t$ est une intégrale convergente.
4. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n :
$$\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\sqrt{n}}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}\mathrm{d}t$$
5. Soit n un entier naturel non nul.
   (a) Pour tout réel x de $\mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$, on pose $\operatorname{cotan} x = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$.
   Montrer que cotan réalise une bijection de $]0,\pi[$ dans $\mathbb{R}$.
   (b) En notant φ la bijection réciproque de cotan, préciser le domaine de définition de φ, les limites aux bornes de ce domaine, ainsi que la valeur de $\varphi(0)$.
   (c) En effectuant le changement de variable $t = \sqrt{n}\operatorname{cotan}(u)$, montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}\mathrm{d}t$ peut s'exprimer en fonction de W_{2n-2} (voir la partie I).
   (d) Montrer que $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t$ peut s'exprimer en fonction de W_{2n+1}.
   (e) Déduire des résultats précédents que :
$$\sqrt{n}W_{2n+1} \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{n}W_{2n-2}$$
6. En utilisant l'équivalent obtenu en partie I, donner la valeurs des intégrales
$$I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2},\ J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t, \text{ et } K = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$$

Exercice 4
On considère la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$
Dans cet exercice on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. et on identifie les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ avec la matrice colonne de leurs coordonnées dans $\mathcal{B}$.

Rappelons que si $u, v \in \mathbb{R}^3$, le produit scalaire canonique s'écrit matriciellement $\langle u, v\rangle = u^T v$.

Partie I

1. Pourquoi peut-on trouver une base orthonormée formée de vecteurs propres de A ?
2. Déterminer les valeurs propres de A ainsi qu'une base orthonormée $\mathcal{B}'$ de vecteurs propres.
   On notera λ_1 la valeur propre entière, λ_2 celle faisant intervenir un signe - et λ_3 la dernière. De même, on note $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ où u_i est associé à λ_i
3. On note $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$. Que peut-on dire de P ?
4. La matrice A est-elle inversible ?
5. Soit $u \in \mathbb{R}^3$, $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Exprimer ses coordonnées (x', y', z') dans la base $\mathcal{B}'$.
6. Calculer $\langle Au, u\rangle$ en fonction de (x, y, z) puis en fonction de (x', y', z') (on pourra utiliser les notations λ_i)
7. Soit λ la plus petite valeur propre de A. Déduire de ce qui précède que, pour tout $u \in \mathbb{R}^3$
   $$\langle Au, u\rangle \geqslant \lambda \|u\|^2$$
   On pourra montrer que $x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$ au préalable.
8. Pour des vecteurs $u, v \in \mathbb{R}^3$, on pose $(u, v)_A = \langle Au, v\rangle$. Montrer que l'opération ainsi définie a les mêmes propriétés que le produit scalaire canonique (symétrie, bilinéarité, $(u, u)_A \geqslant 0$, $(u, u)_A = 0$ seulement lorsque $u = 0_{\mathbb{R}^3}$).

Partie II

Dans cette partie, on considère la même matrice A et on fixe un vecteur $b \in \mathbb{R}^3$. Pour tout $u \in \mathbb{R}^3$ on pose alors

$$J_b(u) = \frac{1}{2}\langle Au, u\rangle - \langle u, b\rangle$$

1. Quels sont les ensembles de départ et d'arrivée de la fonction J_b ? Que vaut $J_b(0)$?
2. Première étude de la fonction J_b.
   (a) On pose $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$. Calculer $J_b(u)$. J_b est donc une fonction de trois variables.
   (b) Calculer $\overrightarrow{grad}\, J_b(u)$. Il s'agit du vecteur dont les coordonnées sont $\frac{\partial J_b}{\partial x}(u)$, $\frac{\partial J_b}{\partial y}(u)$ et $\frac{\partial J_b}{\partial z}(u)$.
   (c) Les trois dérivées partielles de J_b sont également des fonctions de 3 variables. Calculer la matrice H dont la première colonnes est composée des trois dérivées partielles de $\frac{\partial J_b}{\partial x}$, la deuxième colonne des trois dérivées partielles de $\frac{\partial J_b}{\partial y}$ et la dernière colonne des trois dérivées partielles de $\frac{\partial J_b}{\partial z}$.
3. En utilisant la question 7 de la partie I, montrer que
   $$J_b(u) \geqslant \frac{1}{2}\lambda\|u\|^2 - \|b\|\|u\|$$
   où λ désigne encore la plus petite valeur propre de A.
4. Montrer alors que la fonction J_b est minorée et non majorée. On pourra étudier la fonction $\varphi : t \mapsto \frac{\lambda}{2}t^2 - at$ définie sur $\mathbb{R}$, pour une valeur de a bien choisie.
5. Montrer que $\inf\limits_{u\in\mathbb{R}^3} J_b(u) \leqslant 0$.
6. Montrer que si $\|u\| > \frac{2\|b\|}{\lambda}$ alors $J_b(u) > 0$.
7. On admet (ce sera prouvable avec des outils pas encore étudiés) que J_b prend une valeur minimale en un $u_0 \in \mathbb{R}^3$ et que $\overrightarrow{grad}\, J_b(u_0) = \vec{0}$.
   Montrer que $u_0 = A^{-1}b$.