

Table des matières

I	Continuité	1
I.1	Domaines de définition	1
I.2	Fonctions continues	2
II	Dérivées partielles	2
II.1	Dérivabilité	2
II.2	Taylor-Young	2
II.3	Equations aux dérivées partielles	3
III	Extremas	3
III.1	Points critiques	3
III.2	Matrice hessienne	4
III.3	Etude des extrema	4

I Continuité

I.1 Domaines de définition

Définition 1

Soit $r \in [0, +\infty[$ et $X_0 \in \mathbb{R}^p$

1. La boule ouverte de rayon r et de centre X_0 est $B(X_0, r) = \{X \in \mathbb{R}^p \mid \|X_0 - X\| < r\}$.
2. La boule fermée de rayon r et de centre X_0 est $\overline{B}(X_0, r) = \{X \in \mathbb{R}^p \mid \|X_0 - X\| \leq r\}$.

Définition-Proposition 1

Soit A une partie de \mathbb{R}^p . Les propositions suivantes sont équivalentes.

1. il existe $X_0 \in \mathbb{R}^p$ et $r > 0$ tels que $A \subset \overline{B}(X_0, r)$.
2. pour tout $X_0 \in \mathbb{R}^p$ il existe $r > 0$ tel que $A \subset \overline{B}(X_0, r)$.
3. il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall X \in A \ \|X\| \leq M$.

Dans ce cas, on dit que A est une partie **bornée** de \mathbb{R}^p .

Définition 2

Soit A une partie de \mathbb{R}^p .

1. On dit que A est une partie **ouverte** de \mathbb{R}^p (on dit aussi que A est un ouvert) ssi

$$\forall X_0 \in A \exists r > 0 \ B(X_0, r) \subset A$$

2. On dit que A est une partie **fermée** de \mathbb{R}^p ssi \overline{A} (son complémentaire) est une partie ouverte.

Définition 3

Soit A une partie de \mathbb{R}^p et $X_0 \in \mathbb{R}^p$.

1. On dit que X_0 est un point intérieur à A ssi $\exists r > 0 \ B(X_0, r) \subset A$. En particulier $X_0 \in A$.
2. On dit que X_0 est un point extérieur à A ssi $\exists r > 0 \ B(X_0, r) \subset \mathbb{R}^p \setminus A$. En particulier $X_0 \notin A$ et X_0 est un point du complémentaire de A .
3. On dit que X_0 est un point adhérent à A ssi $\forall r > 0 \ B(X_0, r) \cap A \neq \emptyset$. Cette fois on a pas forcément $X_0 \in A$. Par contre X_0 n'est pas extérieur à A .
4. On dit que X_0 est un point frontière de A ssi X_0 est à la fois adhérent et pas intérieur à A , ou encore pour tout $r > 0$, la boule ouverte $B(X_0, r)$ a un intersection non vide avec l'intérieur et l'extérieur de A .

Proposition 1

Soit A une partie non vide de \mathbb{R}^p . On note $B = \mathbb{R}^p \setminus A$ le complémentaire de A . Soit $X_0 \in \mathbb{R}^p$

1. X_0 est intérieur à A ssi X_0 n'est pas adhérent à B .
2. X_0 est adhérent à A ssi X_0 n'est pas intérieur à B .
3. A est ouvert ssi tout point de A est intérieur à A .
4. A est fermé ssi tout point adhérent à A est un point de A .
5. Tout point de A est adhérent à A .
6. Tout point intérieur à A est un point de A .

I.2 Fonctions continues

Définition 4

Soit A une partie de \mathbb{R}^p et $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$. Soit $\ell \in \mathbb{R}^n$.

1. Soit a un point adhérent à A . On dit que f admet ℓ comme limite en a ssi

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha > 0 \forall x \in A \ \|x - a\| \leq \alpha \Rightarrow \|f(x) - \ell\| \leq \varepsilon$$

Il faut comprendre $\|x - a\|$ comme la norme dans \mathbb{R}^p et $\|f(x) - \ell\|$ comme la norme dans \mathbb{R}^n .

2. Soit $a \in A$. On dit que f est continue en a ssi

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha > 0 \forall x \in A \ \|x - a\| \leq \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| \leq \varepsilon$$

f est **continue** sur A ssi f est continue en tout point de A .

Théorème 1

Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ où $A \subset \mathbb{R}^p$.

1. On note $f = (f_1, \dots, f_n)$ les fonctions coordonnées de f . f est continue (en un point ou sur A) si et seulement si toutes les f_i sont continues.
2. Une somme de fonctions continues est continue, le produit d'une fonction continue par un réel est continue ($\mathcal{C}(A, \mathbb{R}^n)$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel)
3. Si $n = 1$ (fonctions à valeurs réelles), le produit de deux fonctions continues est encore continue. L'inverse d'une fonction continue qui ne s'annule pas est continue.
4. Soit $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ telle que $f(A) \subset U$. Si f et g sont continues alors $g \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ est continue sur A .

Théorème 2 (Image d'un fermé borné)

Soit $A \subset \mathbb{R}^p$ **fermée et bornée** et $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$

1. Si f est continue sur A , alors $f(A)$ est une partie fermée et bornée de \mathbb{R}^n .
2. Si $n = 1$ et que $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors f est bornée et atteint ses bornes : $\inf_{x \in A} (f(x)) = \min_{x \in A} (f(x))$ et $\sup_{x \in A} (f(x)) = \max_{x \in A} (f(x))$.

II Dérivées partielles

II.1 Dérivabilité

Définition 5

Soit $f : \begin{cases} U \rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) \end{cases}$ où $U \subset \mathbb{R}^p$. Soit $a = (a_0, y_0, z_0)$ un point **intérieur** à U .

On dit que f possède une dérivée partielle par rapport à x en $a = (x_0, y_0, z_0)$ ssi l'application partielle $x \mapsto (x, y_0, z_0)$ (qui est définie sur un intervalle centré en x car a est intérieur) est dérivable en x_0 . Ce nombre dérivé est alors noté $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)$ ou $\partial_1 f(x_0, y_0, z_0)$.

On définit de même $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}$.

Définition 6

Soit U un **ouvert** de \mathbb{R}^p et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$. On dit que f est de classe \mathcal{C}^1 sur U ssi f possède 3 (ou 2) dérivées partielles sur U et que ces fonctions de 3 (ou 2) variables sont continues.

Définition 7

Soit $U \subset \mathbb{R}^p$ un ouvert et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ (remarquez le cas $n = 1$). Si f possède des dérivées partielles en $(x, y, z) \in U$, le

gradient de f en (x, y, z) (noté $\overrightarrow{\text{grad}} f(x, y, z)$) est le vecteur $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \end{pmatrix}$.

En physique, le gradient est parfois noté ∇f

II.2 Taylor-Young

Théorème 3

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ un fonction \mathcal{C}^1 , où U est un ouvert de \mathbb{R}^2 . Soit $(x_0, y_0) \in U$. Pour (h, k) de norme "assez petite"

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + o_{(h,k) \rightarrow (0,0)}(\|(h, k)\|)$$

Corollaire 1

Une fonction de classe \mathcal{C}^1 est continue.

Proposition 2 (Composition)

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ (U ouvert) et $g : t \mapsto (x(t), y(t))$ une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs dans U .

Si f et g sont de classe \mathcal{C}^1 , alors $\varphi = f \circ g : t \mapsto f(x(t), y(t))$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I et pour $t \in I$

$$\varphi'(t) = x'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))$$

Proposition 3 (Composition, changement de variables)

On considère $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $g : V \rightarrow \mathbb{R}^p$ où U est un ouvert de \mathbb{R}^p et V un ouvert de \mathbb{R}^m . Si $g(V) \subset U$ et que les fonctions f, g sont de classe \mathcal{C}^1 alors $f \circ g$ est de classe \mathcal{C}^1 sur V .

Si on note $f : (u_1, \dots, u_p) \mapsto f(u_1, \dots, u_p)$ et $g : (x_1, \dots, x_m) \mapsto g(x_1, \dots, x_m)$ et $g = (g_1, \dots, g_p)$ les fonctions coordonnées, alors $f \circ g$ dépend des variables x_1, \dots, x_m et pour $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ et $a \in V$

$$\frac{\partial f \circ g}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^p \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(a) \frac{\partial f}{\partial u_j}(g(a))$$

Proposition 4 (Un exemple)

Avec les mêmes notations que la proposition précédente.

On note $f : (u, v) \mapsto f(u, v)$ et $g : (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} \alpha(x, y) \\ \beta(x, y) \end{pmatrix}$ (f est à deux variables et g à valeurs dans \mathbb{R}^2).

Alors $h = f \circ g : (x, y) \mapsto h(x, y) = f(\alpha(x, y), \beta(x, y))$ et on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x, y) \frac{\partial f}{\partial u}(\alpha(x, y), \beta(x, y)) + \frac{\partial \beta}{\partial x}(x, y) \frac{\partial f}{\partial v}(\alpha(x, y), \beta(x, y)) \\ \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial \alpha}{\partial y}(x, y) \frac{\partial f}{\partial u}(\alpha(x, y), \beta(x, y)) + \frac{\partial \beta}{\partial y}(x, y) \frac{\partial f}{\partial v}(\alpha(x, y), \beta(x, y)) \end{aligned}$$

Définition 8 (Dérivées d'ordre supérieur)

Comme pour les fonctions d'une variable, on peut évidemment continuer à dériver des dérivées partielles si elles sont encore dérivables.

La notation est la suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right), \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

Théorème 4 (Théorème de Schwarz)

Si f est de classe \mathcal{C}^2 sur un ouvert U de \mathbb{R}^p , alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ (et de même avec toutes les autres variables éventuelles).

II.3 Equations aux dérivées partielles**III Extremas****III.1 Points critiques****Définition 9**

Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles et $A \subset \mathbb{R}^2$. Soit $a_0 = (x_0, y_0) \in A$. On dit que f possède un maximum local (resp. minimum local) ssi il existe un $r > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in A \cap \overline{B}(a_0, r) \quad f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$$

(resp. $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$).

Définition 10

Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles et $A \subset \mathbb{R}^2$. Un point a **intérieur** à A est appelé **point critique** de f ssi $\overrightarrow{\text{grad}} f(a) = \vec{0}$ (toutes les dérivées partielles s'annulent simultanément)

Proposition 5

Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles et $A \subset \mathbb{R}^2$ un **ouvert**. Soit $a \in A$.

Si f possède un extremum local en a alors a est un point critique de f .

III.2 Matrice hessienne

Théorème 5 (Taylor-Young, ordre 2)

Soit $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ où U est un ouvert non vide de \mathbb{R}^2 . Soit $(x_0, y_0) \in U$ et $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(x_0 + h, y_0 + k) \in U$.

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) = & f(x_0, y_0) + h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \\ & \frac{1}{2!} \left(h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \right) \\ & + o_0(h^2 + k^2) \end{aligned}$$

Il faut comprendre ce o_0 comme représentant une limite quand $(h, k) \rightarrow (0, 0)$.

Définition 11

Soit $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ où U est un ouvert non vide de \mathbb{R}^2 .

Soit $(x_0, y_0) \in U$ fixé. La **matrice hessienne** de f au point (x_0, y_0) est la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

III.3 Étude des extrema

Théorème 6

Soit $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ où U est un ouvert non vide de \mathbb{R}^2 . Soit $X_0 \in U$ un point critique de f .

Notons également H la matrice hessienne de f au point X_0 .

1. Si $\det(H) > 0$ alors f possède un extremum local en X_0 .
 - (a) si $\text{tr}(H) > 0$, il s'agit d'un minimum.
 - (b) si $\text{tr}(H) < 0$, il s'agit d'un maximum.
2. Si $\det(H) < 0$, alors f n'a ni minimum local ni maximum local en X_0 (point col).
3. Si $\det(H) = 0$, et $\text{tr}(H) \neq 0$ on peut reprendre les conclusions du premier point.