Application directe du cours

Exercice 1

1. *Soit* n *un entier naturel. Donner le coefficient de* X^n *dans le polynôme* $(X+1)^{2n}$*. Même question avec le polynôme* $(X+1)^n(X+1)^n$ *(considéré en tant que produit de deux polynômes). Que peut-on en déduire ?*
2. *Calculer le degré et le coefficient dominant de* $(X+1)^n - (X-1)^n$.

Exercice 2

Effectuer la division euclidienne de A *par* B *dans les cas suivant*

1. $A = X^3 - 1$ *et* $B = X + 2$
2. $A = X^4 + iX^3 - iX^2 + X + 1$ *et* $B = X^2 + iX + 1$
3. $A = X^4 - X^3 - 4X^2 + 5X - 3$ *et* $B = X^2 + X - 1$
4. $A = 4X^3 + X^2$ *et* $B = X + 1 + i$

Equations dont l'inconnue est un polynôme

Exercice 3

Trouver les polynômes vérifiant :

1. $(P')^2 = 4P, \ P \in \mathbb{K}[X]$
2. $P(X+1) - P(X) = X, \ P \in \mathbb{K}[X]$ *et* $\deg(P) \leqslant 2$.
3. $P(X^2) = (X^2+1)P(X), \ P \in \mathbb{K}[X]$
4. $Q^2 = XP^2, \ P, Q \in \mathbb{K}[X]$
5. $P(X+1) = -P(X), \ P \in \mathbb{K}[X]$
6. $P(X+1) - P(X-1) = X^2 + 1, \ P \in \mathbb{K}_3[X]$.

Exercice 4

1. *Soit l'application* $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ P(X) & \mapsto & P(X+1) - P(X) \end{array} \right.$*. Calculer* $f(A)$ *où* $A(X) = X^2 + 2X + 1$.
2. *Déterminer le degré et le coefficient dominant de* $f(P)$ *pour* P *un polynôme.*
3. *Trouver tous les antécédents de* X *par* f.
4. *En utilisant un de ces antécédents, calculer* $\sum\limits_{k=1}^{n} k$.
5. *Comment adapter la méthode au calcul de* $\sum\limits_{k=0}^{n} k^\alpha$ *pour* $\alpha \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ *quelconque ?*

Restes

Exercice 5

Déterminer les restes des divisions euclidiennes suivantes :

1. $P \in \mathbb{K}[X]$ *par* $(X-a)(X-b)$ *où* $a, b \in \mathbb{K}$ *et* $a \neq b$.
2. $P \in \mathbb{K}[X]$ *par* $(X-a)^2$ *où* $a \in \mathbb{K}$
3. $(\cos a + X \sin a)^n$ *par* $X^2 + 1$

Exercice 6

Soit $n \geqslant 3$*. Déterminer le reste de l division de* X^n *par* $(X-1)^3$.

Racines et multiplicité

Exercice 7

Déterminer la multiplicité de 1 *comme racine de* $X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1$ *pour* $n \geqslant 1$.

Exercice 8

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$*. A quel condition sur* $a, b \in \mathbb{R}$ *le polynôme* $P = aX^{n+1} + bX^n + 1$ *admet-il* 1 *comme racine au moins double ? Calculer alors le quotient de* P *par* $(X-1)^2$.

Exercice 9

Trouver tous les polynômes P *à coefficients réels qui vérifient*

1. $\forall n \in \mathbb{N} \ P(n) = n^2$
2. $\forall n \in \mathbb{N} \ P(n) = n^2 - 1$.

Exercice 10

Trouver pourquoi il n'existe pas de polynôme P *tel que*

1. $\forall x \in \mathbb{R}^+ \ P(x) = \sqrt{x}$
2. $\forall x \in \mathbb{R} \ P(x) = \sin(x)$
3. $\forall x \in \mathbb{R} \ P(x) = e^x$
4. $\forall z \in \mathbb{C} \ P(z) = \overline{z}$.

Coefficients et racines

Exercice 11

Résoudre l'équation $x^3 - 8x^2 + 23x - 28 = 0$ *sachant que la somme de deux de ses racines égale la troisième.*

Exercice 12

Déterminer $\alpha \in \mathbb{C}$ *pour que* $P(X) = 2X^3 - X^2 - 7X - 2\alpha$ *possède deux racines de somme* 1.

Factorisation

Exercice 13

Vérifier que $X^2 + X + 1 | X^{722} + X^{241} + X^{21}$.

Exercice 14

1. *Soit* $P = X^4 - X^3 + 2X^2 - 2X + 4$. *Vérifier que* $P(1+i) = 0$ *et en déduire une factorisation de* P *en polynômes à coefficients réels.*
2. *Montrer que tout polynôme de degré 3 à coefficients réels possède au moins un racine réelle de deux manières différentes (une analytique, l'autre algébrique).*
3. *Est-ce encore vrai pour le degré 4 ?*

Exercice 15

Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ *puis dans* $\mathbb{R}[X]$ *les polynômes*

1. $P_1 = X^5 - 1$
2. $P_2 = X^5 + X$
3. $P_3 = (1 - X^2)^3 + 8X^3$.
4. $P_4 = X^4 - 2\cos\theta X^2 + 1$
5. $P_5 = X^4 + X^2 + 1$
6. $P_6 = X^3 - 5X^2 + 3X + 9$

Sommes et racines

Exercice 16

Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ *le polynôme* $(X+1)^{43} - (X-1)^{43}$ *puis dans* $\mathbb{R}[X]$.

En déduire la valeur de $\sum\limits_{k=1}^{21} \operatorname{cotan}^2 \frac{k\pi}{43}$.

Exercice 17

On pose $P(X) = (X+1)^n - e^{2ina}$ *où* $a \in \mathbb{R}$ *et* $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.

1. *Factoriser* P *dans* $\mathbb{C}$
2. *En déduire une expression de* $1 - e^{2ina}$ *puis de* $\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)$.