I Frenet, courbure

Exercice 1 (Application simple de la définition)

On considère la courbe $f : t \mapsto \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$. Calculer la longueur de la courbe entre les instants 0 et $a \in \mathbb{R}$ fixé.

Exercice 2
Donner la longueur du support de la courbe

$$f : t \mapsto \begin{pmatrix} (1+\cos(t))\cos(t) \\ (1+\cos(t))\sin(t) \end{pmatrix} = (1+\cos(t)) \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Bonus : Donner en fonction de t le module et un argument de l'affixe du point $M(t)$.

Exercice 3
On considère la courbe paramétrée $f : t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ \ln(\cos(t)) \end{pmatrix}$ dont le support est la courbe d'équation $y = \ln(\cos(x))$.

1. Donner l'ensemble de définition ainsi qu'un ensemble d'étude de f.
2. Calculer en chaque point régulier le repère de Frenet.
3. Calculer la courbure en tout point régulier.
4. En déduire une expression de la courbe développée.

Exercice 4
Déterminer les courbes birégulières telles que la courbure soit proportionnelle à l'abscisse curviligne, ie vérifiant $\gamma = as$ où $a \in \mathbb{R}^*$ et s est une abscisse curviligne.

Indication : on pourra revenir, une fois n'est pas coutume, utiliser le lien entre γ et α et exprimer les solutions f en fonction de s.

II Enveloppes

Exercice 5
Une échelle de longueur ℓ est placée contre un mur. Si l'on fait glisser le pied de l'échelle sur le plan horizontal, elle prend dans l'espace différentes positions dont nous cherchons l'enveloppe.

1. On note A le point de contact au sol et B le point de contact au mur. Dans un repère à préciser, donner une paramétrisation des coordonnées de (AB).
2. Déterminer l'enveloppe des droites (AB)

Exercice 6
On considère le cercle unité centré en O noté $\mathcal{C}$ ainsi qu'une source lumineuse au point S de coordonnées $(-1, 0)$.

1. Soit $t \in]-\pi, \pi[$ et $A(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$. Donner un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}_t$ portant la réflexion d'un rayon lumineux arrivant sur le cercle en $A(t)$.
2. Donner une paramétrisation de l'enveloppe des droites $(\mathcal{D}_t)_{t \in]-\pi,\pi[}$ et tracer.

Exercice 7
On considère deux points P, Q parcourant le cercle unité à des vitesses angulaires respectives de 1 et $\omega \neq \pm 1$. Calculer une représentation paramétrique de l'enveloppe des droites $\mathcal{D}_t = (P(t)Q(t))$. On pourra utiliser les nombres complexes.

Tracer pour $\omega = 3$.

Exercice 8
On considère la demi-hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = 1$ et $x \geqslant 0$. On paramétrise par $f : t \mapsto \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(t) \\ \mathrm{sh}(t) \end{pmatrix}$ Calculer la développée en tant qu'enveloppe des normales.