Concours blanc : math B

Durée : 4H. Calculatrices interdites. **Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction et la propreté : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.**
Lisez l'énoncé attentivement et en entier **AVANT** de commencer chaque exercice.

Le sujet comporte 3 exercices indépendants et 3 pages.

Exercice 1
Dans cet exercice, on identifie le plan à $\mathbb{R}^2$ et pour un point $A : \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ on considère la courbe Γ_A paramétrée par

$$\begin{cases} x(t) = t^3 + 3t^2 - at \\ y(t) = t^3 - 3t^2 - bt \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

1. Étude dans le cas où $a = b = 9$.
   (a) Montrer que Γ_A possède un axe de symétrie que l'on précisera. On étudiera les fonctions x et y sur $[0, +\infty[$.
   (b) Étudier les variations de x et y. On consignera les résultats dans un tableau de variations.
   (c) Préciser les tangentes verticales ou horizontales ainsi que la tangente au point de paramètre 0.
   (d) Montrer que Γ_A possède au moins un point double, c'est à dire un même point correspondant à deux valeurs distinctes du paramètre. Préciser l'angle entre les tangentes en ce point.
   (e) Étudier la branche infinie en $+\infty$.
   (f) Tracer Γ_A.
2. Cas général : a et b sont réels quelconques.
   (a) Montrer que Γ_A possède un point singulier (aussi appelé point stationnaire) si et seulement si A appartient à une courbe $\mathcal{P}$ dont on précisera l'équation.
   (b) Étudier et tracer la conique d'équation $(x-y)^2 - 24(x+y) = 0$.

Exercice 2
Dans cet exercice, on s'intéresse à des sous ensembles de l'espace identifié à $\mathbb{R}^3$.
On note $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et O l'origine du repère canonique.
Dans la deuxième partie, on considère la fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & y(y - 2\sqrt{2}x) \end{cases}$$

ainsi que le sous ensemble de l'espace S d'équation cartésienne

$$S : z = f(x, y) = y(y - 2\sqrt{2}x)$$

Pour $u, v \in \mathbb{R}$, on pose également de point $M(u, v) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}uv \\ (u+v)^2 \\ (u^2 - v^2)^2 \end{pmatrix}$

Partie I : échauffement

1. On considère la droite $\mathcal{D}_1$ donnée par le système d'équation $\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ -x + 2y + z = 1 \end{cases}$. Donner un point et un vecteur directeur unitaire de $\mathcal{D}_1$. Il s'agit de résoudre le système et d'interpréter le résultat.
2. On note $\mathcal{D}_2$ la droite passant par $A : \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et dirigée par $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donner un système d'équation de $\mathcal{D}_2$, c'est à dire deux équations de plans contenant $\mathcal{D}_2$ et qui soient non confondus.
3. On considère la droite vectorielle $\mathcal{D}_3 = \mathrm{Vect}(\vec{u}_3)$ où $\vec{u}_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$. On note p_3 le projecteur orthogonal sur $\mathcal{D}_3$.

(a) Calculer $\|\vec{u}_3\|$.

(b) Pour $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$, montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $p_3(\vec{u}) = \alpha \vec{u}_3$. Que dire de $\vec{u} - p_3(\vec{u})$? On pourra illustrer la réponse par un schéma.

(c) On note $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Calculer les coordonnées de $p_3(\vec{u})$ en fonction de x, y, z.

Partie II : Étude de S

1. Comparaison de S et des points $M(u, v)$.
   (a) Donner deux exemples distincts de points de S.
   (b) Montrer que pour tout u, v réels, on a $M(u, v) \in S$.
   (c) Trouver un point de S qui ne puisse pas s'écrire sous la forme $M(u, v)$.
2. Sections de S.
   (a) On fixe $\alpha \in \mathbb{R}$ et on note $\mathcal{P}_\alpha$ le plan d'équation $y = \alpha$. Montrer que $S \cap \mathcal{P}_\alpha$ est une droite affine dont on précisera un point et un vecteur directeur.
   (b) On fixe maintenant $\beta \in \mathbb{R}$ et on note $\mathcal{P}_\beta$ le plan d'équation $x = \beta$. Montrer que $S \cap \mathcal{P}_\beta$ est une parabole.
   Représenter cette parabole dans le repère $(O_\beta, \vec{\jmath}, \vec{k})$ et dans le cas $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$. On a posé $O_\beta = \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Le repère considéré est donc bien un repère du plan $\mathcal{P}_\beta$ et on notera abusivement (Oy) et (Oz) ses axes.
   (c) On fixe finalement $\gamma \in \mathbb{R}$ et on pose $\mathcal{P}_\gamma : z = \gamma$. On note $\Lambda_\gamma = S \cap \mathcal{P}_\gamma$.
      i. Réduire l'équation de conique $y(y - 2\sqrt{2}x) = \gamma$.
      ii. Décrire Λ_0.
      iii. Suivant les valeurs de $\gamma \in \mathbb{R}^*$, donner la nature et l'axe focal de Λ_γ.
      iv. Tracer dans un même repère les 3 courbes obtenues pour $\gamma \in \{-2, 0, 1\}$.
3. Plan tangents
   (a) Justifier rapidement que f est dérivable suivant ses deux variables et calculer $\overrightarrow{grad} f(x_0, y_0)$ pour $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$. Préciser les éventuelles valeurs de x_0, y_0 où $\overrightarrow{grad} f(x_0, y_0) = \vec{0}$
   (b) Notons $\vec{n}_0 = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ 1 \end{pmatrix}$. On a vu en cours que $\vec{n}_0$ est normal au plan $\mathcal{P}_0$ tangent à S au point $M_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0) \end{pmatrix}$.
      i. Préciser les points $M_0 \in S$ où le plan tangent est horizontal (c'est à dire normal à $\vec{k}$).
      ii. Dans le cas général, donner une équation de $\mathcal{P}_0$, le plan tangent à S en M_0.
4. Une projection.
   Dans cette question on considère la courbe paramétrée de l'espace donnée par $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & \overrightarrow{OM}(t, -2t) \end{array} \right.$ et on note $N(t)$ le point vérifiant $\overrightarrow{ON(t)} = g(t)$. Rappelons que le point $M(u, v)$ est défini dans le préambule.
   (a) On note $g(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$. Déterminer les fonctions x, y, z.
   (b) On note $\mathcal{P} = \mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Justifier rapidement que $\mathcal{P}$ est un plan vectoriel dont $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base orthonormée et calculer $\vec{w}$ tel que $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthonormée directe de l'espace.
   (c) Pour $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ on note $p(X)$ son projeté orthogonal sur $\mathcal{P}$. Calculer en fonction de a, b, c les réels α et β tels que $p(X) = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$.

(d) Appliquer le résultat précédent pour montrer que $p(g(t)) = g(t)$. Qu'en déduire pour le point $N(t)$?

(e) Montrer que le support de g est inclus dans une parabole que l'on exprimera dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ du plan $\mathcal{P}$.

Exercice 3

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\varphi_A : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM \end{array} \right.$.

Attention, φ_A n'est pas l'endomorphisme canoniquement associé à A car M n'est pas une colonne mais une matrice carrée.

Partie I

Dans cette partie on pose $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

1. Montrer que A est diagonalisable et exhiber D, P telles que D est diagonale et P inversible et $A = PDP^{-1}$.
2. On pose $C = \frac{1}{5}A$ et f l'endomorphisme canoniquement associé. Sans calcul d'éléments propres, diagonaliser C puis interpréter géométriquement l'endomorphisme f.
3. Montrer qu'il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$ composée de vecteurs propres de B et donner une telle base.
   Pour le calcul du polynôme caractéristique, on pourra considérer l'opération $C_1 \leftarrow C_1 - 3C_3$.
4. La base obtenue à la question précédente est-elle directe ? Donner un exemple d'une matrice $Q \in O_4(\mathbb{R})$ telle que $Q \notin SO_4(\mathbb{R})$.
5. On pose
$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ E_{22} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   (a) Vérifier que la famille $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Calculer $\varphi_A(E_{ij})$ pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant 2$.
   (c) Donner la matrice de φ_A dans $\mathcal{B}$.
   (d) L'endomorphisme φ_A est-il diagonalisable ? Si oui, préciser ses valeurs propres et une base de vecteurs propres de φ_A (on rappelle qu'ici, un vecteur propre sera une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$).

Partie II

On fixe maintenant $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour un $n > 1$.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle vérifiant $\varphi_A(M) = \lambda M$. Montrer que la matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible.
2. Montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de φ_A, c'est également une valeur propre de A.
3. Soit μ une valeur propre de A, X un vecteur colonne non nul tel que $AX = \mu X$. Soit M une matrice dont une colonne est égale à X et toutes les autres colonnes sont nulles. Montrer que M est un vecteur propre de φ_A associé à μ.
   On pourra calculer AM par colonne.
4. Donner l'ensemble des valeurs propres de φ_A.
5. Montrer que si A est diagonalisable, φ_A l'est également (on pourra, à partir d'une base de vecteurs propres de A, construire une base de vecteurs propres de φ_A).